Pertemuan : 9
Materi : Teorema Green
Bab IV. Teorema Green, Teorema Divergensi Gauss, dan Teorema Stokes

Standar Kompetensi :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Memahami Teorema Green

Kompetensi Dasar :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Menyebutkan kembali pengertian teorema green.
2. Membuktikan teorema green di bidang
3. Menyebutkan kembali bentuk vektor dari teorema green
4. Memperluas teorema green

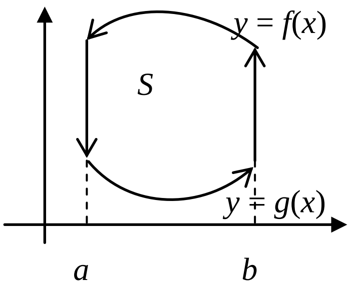
Uraian Materi
1.1 Teorema Green

Misalkan C kurva mulus sepeotong-sepotong, tertutup sederhana, yang membentuk batas dari suatu daerah S di bidang xy. Jika M dan N kontinu dan mempunyai turunan kontinu pada S dan batasnya C , maka

$$\iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \oint_C Mdx + Ndy$$

Bukti
Misalkan $S = \{(x, y): g(x) \le y \le f(x), a \le x \le b\}$ dan batasnya C terdiri atas empat busur C_1, C_2, C_3, dan C_4. Dan

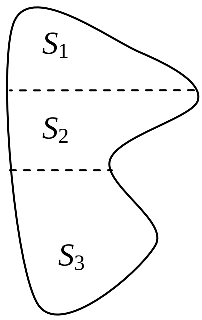
$$\begin{aligned}\oint_C Mdx &= \int_{C_1} Mdx + \int_{C_2} Mdx + \int_{C_3} Mdx + \int_{C_4} Mdx \\ &= \int_a^b M\big(x, g(x)\big)dx + \int_b^a M\big(x, f(x)\big)dx \\ &= -\int_a^b \big[M\big(x, f(x)\big) - M(x, g(x))\big]dx \\ &= -\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} dydx \\ &= -\iint_S \frac{\partial M}{\partial y} dA\end{aligned}$$



Sama halnya dengan memperlakukan S sebagai suatu himpunan x sederhana, maka diperoleh

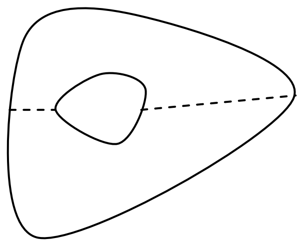
$$\oint_C Ndy = \iint_S \frac{\partial N}{\partial x} dA$$

Hasil di atas dapat diperluas ke daerah S tak sederhana yaitu dengan memecah menjadi suatu gabungan daerah-daerah S_1, S_2, ..., S_k yang berupa himpunan x sederhana dan y sederhana (Gambar 9).



Gambar 9

Teorema green tetap berlaku untuk suatu daerah S dengan satu atau beberapa lubang, asal saja tiap bagian dari batas terarah sehingga S selalu di kiri selama seseorang menelusuri kurva dalam arah positif seperti gambar 10.



Gambar 10

Contoh 1
Andaikan C adalah batas dari segitiga dengan titik-titik sudut (0, 0), (1, 2), dan (0, 2). Hitung

$$\oint_C 4x^2ydx + 2ydy$$

Jawab
Diketahui $M = 4x^2y$, dan $N = 2y$. Karena M dan N polinom maka mempunyai turunan yang kontinu, sehingga menurut teorema Green berlaku

$$\begin{aligned} \oint_C 4x^2ydx + 2ydy &= \int_0^1 \int_{2x}^2 (0 - 4x^2)dydx \\ &= \int_0^1 [-4x^2y]_{2x}^{2} dx \\ &= \left[\frac{-8x^3}{3} + 2x^4\right]_0^1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

1.2 Bentuk Vektor Dari Teorema Green

Misalkan C kurva tertutup, sederhana, mulus pada bidang xy dan bahwa kurva tersebut diberi arah berlawanan dengan putaran parameterisasinya $x = x(s)$ dan $y = y(s)$, maka

$$\mathbf{T} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

adalah vektor singgung satuan dan

$$\mathbf{n} = \frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}$$

adalah vektor normal satuan yang menunjuk ke arah luar dari daerah S yang dibatasi oleh C. Jika $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ adalah suatu medan vektor, maka

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \oint_C (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) . \left(\frac{dy}{ds}\mathbf{i} - \frac{dx}{ds}\mathbf{j}\right) ds = \oint_C -N dx + M dy$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_S \operatorname{div} \mathbf{F}\, dA = \iint_S \nabla . \mathbf{F}\, dA$$

Contoh 2

Jika $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ dan melintasi batas C dari bujur sangkar satuan dengan titik-titik sudut (0, 0), (1, 0), (1, 1), dan (0, 1), maka hitung $\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds$!

Jawab

Diketahui $M = x^2 + y^2$ dan $N = 2xy$. Maka $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$ dan $\frac{\partial N}{\partial y} = 2x$.

$$\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{n}\,ds = \int_0^1\int_0^1 4x\,dx\,dy = \int_0^1 2x^2\Big|_0^1 dy = \int_0^1 2dy = 2y\Big|_0^1 = 2$$

Pertemuan : 10

Materi : Teorema Green

Bab IV. Teorema Green, Teorema Divergensi Gauss, dan Teorema Stokes

Standar Kompetensi :

Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :

1. Memahami Teorema Green

Kompetensi Dasar :

Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :

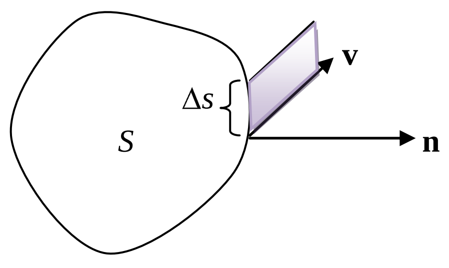
1. Menyebutkan kembali pengertian fluks dari medan vektor.
2. Menghitung fluks medan vektor dengan menggunakan teorema green
3. Menyebutkan kembali rotasi/sirkulasi dari medan vektor.
4. Menghitung rotasi/sirkulasi dari medan vektor.

Uraian Materi

1.1 Fluks Dari Medan Vektor

Andakan $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{v}(x, y)$ menyatakan vektor kecepatan fluida di (x, y) dan andaikan Δs adalah panjang suatu ruas pendek kurva dengan titik awal (x, y). Banyaknya fluida yang melintasi ruas ini per satuan waktu, secara aproksimasi adalah luas jajaran genjang dari gambar 11, yakni $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, \Delta s$. Banyaknya fluida (bersih) meninggalkan S, disebut **fluks** dari medan vektor **F** yang melintasi kurva C dalam arah ke luar, karenanya adalah

$$\text{Fluks } \mathbf{F} \text{ melintasi } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds$$



Gambar 11

Contoh 1

Hitung fluks dari medan vektor $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ melintasi kurva lingkaran satuan

Jawab

$$\text{Fluks } \mathbf{F} \text{ melintasi } C = \oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, ds = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2dydx = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2rdr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

1.2 Rotasi/Sirkulasi Dari Medan Vektor

Suatu fluida yang berada pada bidang *xy* dan dibatasi oleh kurva *C*, maka sirkulasi dari medan vektor **F** yang bekerja pada fluida sekeliling *C* dinyatakan oleh

$$\oint_C \mathbf{F}\,.\ \mathbf{T}\,ds$$

Misalkan $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ **,** maka dengan menggunakan teorema green diperoleh

$$\oint_C \mathbf{F}\,.\ \mathbf{T}\,ds = \oint_C Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Dalam hal lain,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$(\text{rot } \mathbf{F})\ .\ \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

Jadi,

$$\oint_C \mathbf{F}\,.\ \mathbf{T}\,ds = \iint_S (\text{rot }\mathbf{F})\,.\,\mathbf{k}\ dA$$

Contoh 2

Hitung sirkulasi dari medan vektor $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ di sekeliling busur angkar dengan titik-titik sudut (0, 0), (1, 0), (1, 1), dam (0, 1).

Jawab

rot **F . k** = $2y - 2y = 0$, maka $\oint_C \mathbf{F}\,.\ \mathbf{T}\,ds =$ konstan

Pertemuan : 11
Materi : Teorema Green
Bab IV. Teorema Green, Teorema Divergensi Gauss, dan Teorema Stokes

Standar Kompetensi :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Memahami Teorema Green

Kompetensi Dasar :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Menyebutkan kembali pengertian integral permukaan.
2. Menyebutkan kembali pengertian fluks medan vektor menembus permukaan.
3. Membuktikan teorema fluks medan vektor menembus permukaan.
4. Menghitung fluks medan vektor menembus permukaan.

Uraian Materi
1.1 Integral Permukaan
Andaikan permukaan G berupa grafik $z = f(x, y)$ dengan (x, y) mempunyai jangkauan atas persegi panjang R pada bidang xy. Andaikan P suatu partisi yang membagi R menjadi n-buah persegipanjang bagian R_i; menghasilkan padanan partisi permukaan G menjadi n-potongan G_i. Pilih titik $(\overline{x_i}, \overline{y_i})$ di R_i dan tetapkan $(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i}) = (\overline{x_i}, \overline{y_i}, f(\overline{x_i}, \overline{y_i}))$ adalah titik yang berpadanan di G_i , maka definisi **integral permukaan** adalah

$$\iint_G g(x,y,z)dS = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x_i}, \overline{y_i}, \overline{z_i})\Delta S_i$$

Definisi di atas tidak praktis untuk perhitungan integral permukaan, sehingga diperlukan cara yang praktis untuk menghitung integral permukaan.

Teorema Integral Permukaan
Andaikan G suatu permukaan berupa grafik $z = f(x,y)$ dengan (x,y) di R. Jika f mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dan $g(x,y,z) = g\big(x,y,f(x,y)\big)$ kontinu pada R , maka

$$\iint_G g(x,y,z)dS = \iint_R g\big(x,y,f(x,y)\big)\sec\varphi\, dA$$

$$= \iint_R g(x,y,f(x,y))\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, dydx$$

dengan φ adalah sudut antara normal satuan ke atas **n** di $(x,y,f(x,y))$ dan sumbu z positif.

Contoh 1

Hitung $\iint_G xyzdS$ dengan G adalah bagian dari kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ di antara bidang $z = 1$ dan $z = 4$.

Jawab

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = f(x, y)$$

didapat

$$f_x^2 + f_y^2 + 1 = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1 = 2$$

Jadi,

$$\iint_G xyzdS = \iint_R xy\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{2}\, dydx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^4 (rcos\,\theta)(rsin\,\theta)r^2 drd\theta$$

$$= 2\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}} \left[\sin\theta\cos\theta\frac{r^5}{5}\right]_1^4 d\theta$$

$$= \frac{1023\sqrt{2}}{5}\left[\frac{sin^2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

1.2 Fluks Medan Vektor Menembus Permukaan

Permukaan yang dimaksud adalah permukaan dengan dua sisi, yaitu seperti **pita mÖbius** Misalkan permukaan ini mulus, maka ia memiliki suatu vektor normal satuan **n** yang berubah-ubah. Andaikan G suatu permukaan dua sisi yang demikian mulus dan anggap bahwa ia terendam di dalam fluida dengan suatu medan vektor **F** hampir konstan, dan volume fluida ΔV yang melewati potongan ini dalam arah normal satuan **n** adalah

$$\Delta V \approx \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, \Delta S$$

Fluks **F** melintasi $G = \iint_G \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$

Contoh 2

Tentukan fluks ke atas dari medan vektor $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ yang melewati bagian permukaan bola G yang ditentukan oleh

$$z = f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ 0 \le x^2 + y^2 \le 4$$

Jawab

Perhatikan bahwa medan vektor **F** berupa suatu arus berputar yang mengalir dalam arah sumbu z positif.

Persamaan permukaan dapat dituliskan

$$H(x, y, z) = z - \sqrt{9 - x^2 - y^2} = z - f(x, y)$$

sehingga

$$\mathbf{n} = \frac{\Delta H}{|\Delta H|} = \frac{-f_x\mathbf{i}-f_y\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{f_x^2+f_y^2+1}} = \frac{\left(\frac{x}{z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{y}{z}\right)\mathbf{j}+\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2+1}} = \left(\frac{x}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{y}{3}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{z}{3}\right)\mathbf{k}$$

adalah vektor normal satuan ke permukaan. Vektor – **n** juga normal ke permukaan, tetapi arahnya ke bawah. Fluks yang melintasi *G* diberikan oleh

$$\text{fluks} = \iint_G \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\,dS = \iint_G (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 9\mathbf{k})\left(\left(\frac{x}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{y}{3}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{z}{3}\right)\mathbf{k}\right)dS$$
$$= \iint_G 3z\,dS = \iint_R 3z\left(\frac{3}{z}\right)dA = 9(\pi 2^2) = 36\pi$$

R adalah lingkaran berjari-jari 2.

Teorema

Andaikan *G* permukaan mulus dua sisi yang diberikan oleh $z = f(x, y)$ dengan (x, y) di R , dan andaikan **n** menyatakan normal satuan ke atas pada *G*. Jika *f* mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dan **F** = *M***i** + *N***j** + *P***k** suatu medan vektor kontinu, maka fluks **F** yang melintasi *G* diberikan oleh

$$\text{Fluks } \mathbf{F} = \iint_G \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\,dS = \iint_R \left[-Mf_x - Nf_y + P\right]dxdy$$

Contoh 3

Hitung fluks untuk medan vektor **F** = *x***i** + *y***j** + *z***k** yang melintasi bagian *G* dari paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ yang terletak di atas bidang *xy*, dengan mengambil **n** berupa normal ke atas.

Jawab

$$f(x, y) = 1 - x^2 - y^2,\ f_x = -2x, f_y = -2y$$
$$-Mf_x - Nf_y + P = 2x^2 + 2y^2 + z$$
$$= 2x^2 + 2y^2 + 1 - x^2 - y^2 = 1 + x^2 + y^2$$

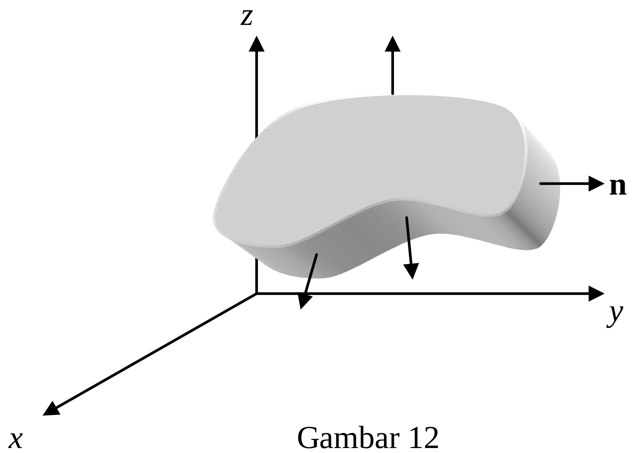
$$\iint_G \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\,dS = \iint_R (1 + x^2 + y^2)dxdy$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 + r^2)r\,dr\,d\theta = \frac{3}{2}\pi$$

Pertemuan **: 12**
Materi **:** Teorema Divergensi Gauss
Bab IV. Teorema Green, Teorema Divergensi Gauss, dan Teorema Stokes

Standar Kompetensi :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Memahami Teorema Divergensi Gauss

Kompetensi Dasar :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Menyebutkan kembali pengertian fluks pada ruang dimensi 3
2. Menyebutkan kembali teorema divergensi Gauss.
3. Membuktikan teorema Divergensi Gauss.
4. Menghitung fluks medan vektor pada ruang dimensi 3 dengan menggunakan teorema divergensi Gauss.

Uraian Materi
1.1 Teorema Divergensi Gauss
Andaikan *S* suatu benda pejal tertutup dan terbatas dalam ruang dimensi-3, yang secara lengkap dicakup oleh suatu permukaan mulus sepotong-sepotong δ*S* (gambar 12)



Gambar 12

Teorema Gauss
Andaikan **F** = *M***i** + *N***j** + *P***k** suatu medan vektor demikian sehingga *M*, *N*, dan *P* mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu pada *S* dan batasnya δ*S*. Jika **n** menyatakan normal satuan terluar terhadap δ*S* , maka

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\; dS = \iiint_S \; \text{div}\,\mathbf{F}\; dV \quad \text{atau}$$

$$\iint_{\partial S} (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma) dS = \iiint_S \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right) dV$$

Bukti
Pertama tinjau kasus dimana *S* adalah *x* sederhana, *y* sederhana, dan *z* sederhana. Cukup menunjukan bahwa

$$\iint_{\partial S} M\cos\alpha\, dS = \iiint_{S} \frac{\partial M}{\partial x} dV$$

$$\iint_{\partial S} N\cos\beta\, dS = \iiint_{S} \frac{\partial N}{\partial y} dV$$

$$\iint_{\partial S} P\cos\gamma\, dS = \iiint_{S} \frac{\partial P}{\partial z} dV$$

Cukup membuktikan yang ketiga, karena yang lain serupa.
Karena S adalah z sederhana, maka S dapat dijelaskan oleh $f_1(x,y) \le z \le f_2(x,y)$. Seperti pada gambar 13, S terdiri dari tiga bagian; S_1 yang berpadanan dengan $z = f_1(x,y)$; S_2 yang berpadanan dengan $z = f_2(x,y)$; dan permukaan S_3 samping yang boleh kosong; pada S_3 $\cos\gamma = \cos 90^0 = 0$, sehingga dapat diabaikan.

$$\iint_{\partial S_2} P\cos\gamma\, dS = \iint_{R} P\big(x,y,f_2(x,y)\big) dxdy$$

$$\iint_{\partial S_1} P\cos\gamma\, dS = -\iint_{R} P\big(x,y,f_1(x,y)\big) dxdy$$

Jadi,

$$\iint_{\partial S} P\cos\gamma\, dS = \iint_{R} \left[P\big(x,y,f_2(x,y)\big) - P\big(x,y,f_1(x,y)\big)\right] dxdy$$

$$= \iint_{R} \left[\int_{f_1}^{f_2} \frac{\partial P}{\partial z} dz\right] dxdy$$

$$= \iiint_{S} \frac{\partial P}{\partial z}$$

Contoh 1
Hitung fluks medan vektor $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j} + yz^3\mathbf{k}$ melewati permukaan benda pejal persegipanjang S yang ditentukan oleh ; $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.
Jawab
$M = x^2$, maka $\frac{\partial M}{\partial x} = 2x$,
$N = 2xz$, maka $\frac{\partial N}{\partial y} = 0$

$P = yz^3$, maka $\frac{\partial P}{\partial z} = 3xz^2$

Menurut teorema gauss, didapat

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\; dS = \iiint_{S} (2x + 0 + 3xz^2)\; dV$$

$$= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2x + 3xz^2)\; dzdydx = 60$$

1.2 Perluasan dan Penerapan

Benda pejal S dapat diperluas untuk benda pejal berlubang seperti keju swiss, asal saja mensyaratkan **n** menunjuk menjauhi bagian dalam benda pejal tersebut. Andaikan δS adalah kulit benda pejal antara dua bola sepusat yang berpusat di titik asal. Teorema Gauss berlaku asal saja δS terdiri atas dua permukaan (permukaan luar dengan **n** menunjuk menjauhi titik asal dan permukaan dalam dengan **n** menunjuk ke arah titik asal)

Contoh 2

Andaikan S benda pejal yang ditentukan oleh $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ dan

$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + (2y + z)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$. Hitung $\iint_{\partial S} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\; dS$

Jawab

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F}\,.\,\mathbf{n}\; dS = \iiint_{S} (1 + 2 + 1) dV$$

$$= 4\left[\frac{4}{3}\pi(2^3) - \frac{4}{3}\pi(1^3)\right] = \frac{112}{3}\pi$$

Pertemuan : 13

Materi : Teorema Stokes

Bab IV. Teorema Green, Teorema Divergensi Gauss, dan Teorema Stokes

Standar Kompetensi :

Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :

1. Memahami Teorema Stokes

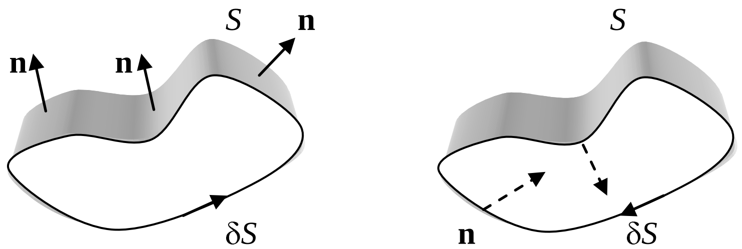
Kompetensi Dasar :

Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :

1. Menyebutkan kembali pengertian rotasi pada ruang dimensi 3
2. Menyebutkan kembali teorema stokes
3. Menghitung rotasi medan vektor pada ruang dimensi 3 dengan menggunakan teorema Stokes.

Uraian Materi

Dalam pasal sebelumnya tentang teorema green di bidang, kali akan diperluas teorema green dalam bentuk vektor dalam ruang dimensi-3. Dalam hal ini S adalah kurva permukaaan di ruang dimensi-3. Pembatasan untuk S: Andaikan S adalah dua sisi dengan normal **n** yang bervariasi secara kontinu (peta mobius satu sisi), batas δS berupa kurva tertutup sederhana mulus sepotong-sepotong, terarah secara konsisten dengan **n**. Ini berarti bahwa jika anda berdiri dekat tepi permukaan dengan kepala anda dalam arah **n** dan mata anda melihat ke arah kurva, permukaan **n** berada di kiri anda (Gambar 13)



Gambar 13

Teorema Stokes

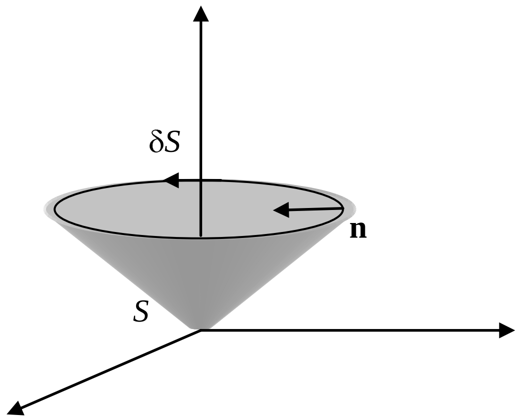
Andaikan S, δS, dan **n** seperti yang ditunjukkan di atas dan andaikan $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ adalah suatu medan vektor dengan M, N, dan P mempunyai turunan parsial tingkat pertama kontinu pada S dan batasnya δS, maka

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{T}\, dS = \iint_S (\text{curl}\, \mathbf{F}) \,.\, \mathbf{n}\, dS$$

Bukti : pada kuliah kalkulus lanjut

Contoh 1

Periksa kebenaran teorema stokes untuk $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ jika S adalah paraboloid $z = x^2 + y^2$ dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 1, z = 1$ sebagai batasnya



Jawab

Persamaan parameter untuk δS adalah $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = 1$, maka

dz = 0 dan

cara langsung

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{T}\, dS = \oint_{\partial S} y dx - x dy = \int_0^{2\pi} [\sin t(-\sin t)dt - \cos t \cos t dt]$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

Menggunakan teorema stokes

$$\text{Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & yz \end{vmatrix} = z\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

Jadi,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \,.\, \mathbf{T}\, dS = \iint_S (\text{curl } \mathbf{F}) \,.\, \mathbf{n}\, dS = \iint_R [-z(2x) - 0 - 2] dx dy$$

$$= -2 \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} [(x^2 + y^2)x - 1]\, dx dy$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1} [r^3 \cos\theta + 1] r dr d\theta = -2\pi$$

Pertemuan **: 14 / Ujian Akhir Semester**
Materi **: Bab III dan Bab IV**
Waktu **: 150 menit**

UJIAN AKHIR SEMESTER
KALKULUS VEKTOR

Jawablah semua pertanyaan di bawah ini dengan penjelasan yang sistematis dan logis. Apabila menggunakan dalil/teorema, maka sebutkan teoremanya/tidak hanya menyebutkan nomor teoremanya.

1. Diberikan medan vektor $\mathbf{F} = 2xy^2\mathbf{i} + 3x^2\mathbf{j}$ dan C adalah bujursangkar satuan dengan titik-titik sudut (0, 0), (1, 0), (1, 1), dan (0, 1); hitung
   a. $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ b. $\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, dS$

2. Misalkan $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; G adalah permukaan yang ditentukan oleh $z = \sqrt{1 - y^2}$, $0 \le x \le 5$. Hitung fluks $\mathbf{F}$ yang melewati G!

3. Buktikan bahwa integral garis $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}).\,\mathrm{d}\mathbf{r}$ bebas tapak, kemudian hitung integralnya, jika:
   a. $\mathbf{F} = (y^2 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 + 2xy)\mathbf{j}$; $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; dan C adalah kurva dengan titik awalnya di (0, 0) dan titik ujung di (3, 1)
   b. $\mathbf{F} = (e^x \sin y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j}$; $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; dan C adalah kurva dengan titik awalnya di (0, 0) dan titik ujung di $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

4. Gunakan teorema divergensi Gauss untuk menghitung integral $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ dimana $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k}$, dan S adalah kotak $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 4$, dan $0 \le z \le 1$.

5. Gaya pusat berbentuk $\mathbf{F} = f(|\mathbf{r}|)\mathbf{r}$, dengan f mempunyai turunan kontinu (kecuali di $|\mathbf{r}| = 0$). Buktikan bahwa kerja yang dilakukan oleh gaya tadi sedemikian rupa sehingga menggerakkan sebuah benda mengelilingi tapak tertutup yang tidak melalui titik asal adalah 0).
   (*Petunjuk* : gunakan teorema stokes ; $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$)