Pertemuan : **4**
Materi : Fungsi Bernilai Vektor dan Gerak Sepanjang Kurva
Bab II. Diferensial Kalkulus Dari Vektor

Standar Kompetensi :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Memahami Kalkulus diferensial dari Vektor.
2. Memahami Kelengkungan, Percepatan, Divergensi, dan Rotasi dari Medan Vektor

Kompetensi Dasar :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Membuktikan kelengkungan sebuah kurva
2. Menyebutkan kembali komponen tangensial dan komponen normal dari percepatan
3. Membuktikan percepatan sebagai penjumlahan dari komponen tangensial dan komponen normal percepatan.
4. Menghitung komponen tangensial dan komponen normal percepatan.

Uraian Materi

1.1 Kelengkungan dan Percepatan Pada Bidang ($\mathbf{R}^2$)

Misalkan $a \le t \le b$, $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$ adalah vektor posisi titik P = P(t) pada bidang. Andaikan $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ ada dan kontinu pada selang [a, b], maka apabila t nilainya naik, P bergerak sepanjang kurva yang mulus, dan panjang lintasan $s = h(t)$ dari P(a) ke P(t) ditentukan oleh

$$s = h(t) = \int_a^t \sqrt{f'(u)^2 + g'(t)^2}\, du = \int_a^t |\mathbf{r}'(t)|\, du$$

Laju titik yang bergerak itu adalah $\frac{dt}{ds} = |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{v}(t)|$. Oleh karena $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, maka s naik apabila t naik. Dengan menggunkan Teorema fungsi invers , s memiliki invers $t = h^{-1}(s)$ dan

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{{ds}/{dt}} = \frac{1}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Andaikan $\mathbf{T}(t)$ vektor singgung satuan di P(t), didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Apabila P(t) bergerak sepanjang kurva, vektor $\mathbf{T}(t)$ arahnya berubah dan menyinggung kurva di titik tersebut. Perbandingan perubahan $\mathbf{T}$ terhadap panjang busur s , yaitu $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ dinamakan **vektor kelengkungan** κ (kappa) di P ditentukan sebagai besaran $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$, jadi $\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|$.

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{\mathrm{T}'(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Jadi,

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{v}(t)|}$$

Contoh 1

Buktikan kelengkungan garis lurus adalah nol.

Jawab

Misalkan P dan Q adalah titik-titik tetap pada garis lurus PQ. Misalkan $\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ dan $\mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ **,** maka vektor untuk persamaan garis lurus PQ adalah

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

dengan demikian,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} \text{ dan } \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \ \mathbf{T}' = \mathbf{0}.$$

Jadi,

$$\kappa = \frac{0}{|\mathbf{b}|} = 0$$

Teorema A

Misalkan $x = f(t)$ dan $y = g(t)$ adalah persamaan parameter kurva yang mulus, maka

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[x'^2 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Khusus untuk kurva dengan persamaan $y = g(x)$, berlaku

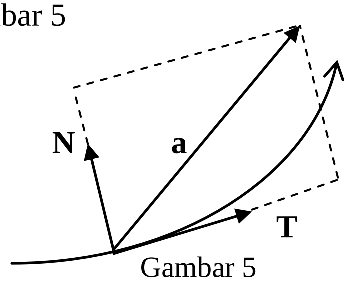
$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Teorema B

Misalkan **a**, **T**, dan **N** berturut-turut vektor percepatan, vektor singgung satuan, dan vektor Normal kurva, maka

$$\mathbf{a} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa\mathbf{N} = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}$$

dengan $a_{\mathbf{T}}$ dan $a_{\mathbf{N}}$ berturut-turut disebut **komponen tangensial dan komponen normal Percepatan.** Lihat gambar 5



Gambar 5

Contoh 2

Tentukan kelengkungan ellips $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ pada t = 0 dan $t = \frac{\pi}{2}$

Jawab

Untuk t = 0, maka titiknya adalah (3, 0). Untuk $t = \frac{\pi}{2}$, maka titiknya adalah (0, 2). Dari persamaan diperoleh

$$x' = -3\sin t \qquad y' = 2\cos t$$
$$x'' = -3\cos t \qquad y'' = -2\sin t$$

Berdasarkan teorema A diperoleh,

$$\kappa = \frac{|6sin^2 t + 6cos^2 t|}{[9sin^2 t + 4cos^2 t]^{\frac{3}{2}}} = \frac{6}{[5sin^2 t + 4]^{\frac{3}{2}}}$$

Sehingga,

$$\kappa(0) = \frac{6}{4^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4} \quad \text{dan } \kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{9}$$

Contoh 3

Sebuah partikel bergerak sedemikian hingga $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j}$ **,** $t \geq 0$. Nyatakan $\mathbf{a}(t)$ dalam **T** dan **N**. Hitung $\mathbf{a}(t)$ untuk t = 2.

Jawab

Diketahui $x = t^2$ dan $y = \frac{1}{3}t^3$. Maka $x' = 2t$, $x'' = 2$, $y' = t^2$, dan $y'' = 2t$.

$\mathbf{v}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, maka

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + t^4} = t\sqrt{4 + t^2}$$

$$\mathbf{a_T} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{4 + 2t^2}{\sqrt{4 + t^2}}$$

$$\mathbf{a_N} = \kappa\left(\frac{ds}{\mathrm{dt}}\right)^2 = \frac{|(2t)(2t) - (t^2)(2)|}{t\sqrt{4 + t^2}} = \frac{2t^2}{t\sqrt{4 + t^2}} = \frac{2t}{\sqrt{4 + t^2}}$$

Sehingga,

$$\mathbf{a}(t) = \frac{4 + 2t^2}{\sqrt{4 + t^2}}\mathbf{T} + \frac{2t}{\sqrt{4 + t^2}}\mathbf{N}$$

$$\mathbf{a}(2) = \frac{4 + 8}{2\sqrt{2}}\mathbf{T} + \frac{4}{2\sqrt{2}}\mathbf{N} = 3\sqrt{2}\mathbf{T} + \sqrt{2}\mathbf{N}$$

Untuk menghindari κ dalam menghitung $\mathbf{a_N}$ dapat menggunakan rumus $|\mathbf{a}(t)|^2 = \mathbf{a_T^2} + \mathbf{a_N^2}$ **.** Perhatikan contoh 2 di atas, $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ sehingga

$$\mathbf{a}_{\mathbf{N}}^2 = (4+4t^2) - \left(\frac{4+2t^2}{\sqrt{4+t^2}}\right)^2 = \frac{4t^2}{4+t^2}$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{N}} = \frac{2t}{\sqrt{4+t^2}}$$

1.2 Kelengkungan dan Percepatan Pada Ruang Dimensi 3

Semua yang didapat tentang kelengkungan dan percepatan pada bidang berlaku juga pada ruang dimensi 3.

Misalkan $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, dengan $a \le t \le b$. $\mathbf{r}$ adalah vektor posisi untuk titik P = P(t) yang menjelajahi kurva selama t bertambah besar. Misalkan $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ ada dan kontinu disetiap t, pada kasus yang demikian kurva tersebut mulus. Panjang busur dari P(a) ke P(b) diberikan oleh

$$s = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|du = \int_a^t \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}du$$

Selanjutnya teorema A dan teorema B pada bidang berlaku juga pada ruang dimensi 3.

Misalkan $a_{\mathbf{T}}$ dan $a_{\mathbf{N}}$ adalah komponen tangensial dan komponen normal percepatan **a,** dan κ adalah koefisien kelengkungan kurva. Maka dapat ditunjukkan bahwa

$$a_{\mathbf{T}} = \mathbf{T}\,.\,\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}'.\ \mathbf{r}''}{|\mathbf{r}'|}$$

$$a_{\mathbf{N}} = |\mathbf{T} \times \mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|}$$

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3}$$

Binormal di P

Diberikan kurva C dan vektor singgung satuan **T** di P, tentu saja terdapat tak terhingga banyaknya vektor satuan tegal lurus terhadap **T** di P, ambil satu diantaranya yaitu

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|}$$

Adalah vektor normal utama. Maka vektor

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

Disebut **binormal**.

Pertemuan : 5
Materi : Medan Vektor, Divergensi, dan Curl dari Medan Vektor
Bab II. Diferensial Kalkulus Dari Vektor

Standar Kompetensi :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Memahami Kalkulus diferensial dari Vektor.
2. Memahami Kelengkungan, Percepatan, Divergensi, dan Rotasi dari Medan Vektor

Kompetensi Dasar :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Menyebutkan kembali pengertian medan vektor.
2. Menyebutkan kembali pengertian divergensi dari medan vektor.
3. Menyebutkan kembali pengertian curl dari medan vektor.
4. Membuktikan sifat-sifat divergensi dan curl dari medan vektor.

Uraian Materi

1.1 Medan Vektor

Perhatikan aliran angin, aliran air sungai, aliran panas pada wajan yang kita rasakan atau dilihat sehari-hari dapat dipandang sebagai kumpulan tak hingga banyaknya vektor, yang disebut **medan vektor**.

Secara matematis medan vektor adalah fungsi bernilai vektor **F** yang berkaitan dengan tiap titik P di ruang dimensi-n suatu vektor **F**(P).

Contoh. 4

Buat sketsa medan vektor berikut $\mathbf{F}(P) = \mathbf{F}(x, y) = -\frac{1}{2}y\mathbf{i} + \frac{1}{2}x\mathbf{j}$

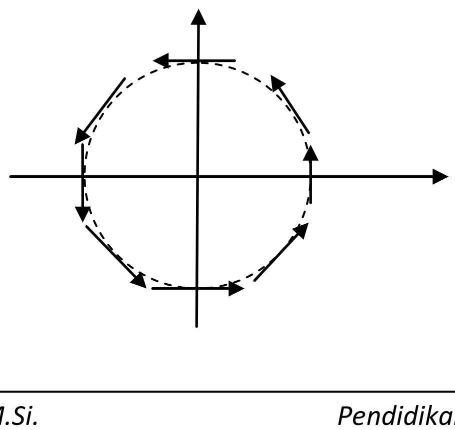
Jawab

Misalkan $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ adalah vektor posisi dari titik (x, y), maka

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}(x, y) = -\tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}xy = 0$$

jadi, **F** tegak lurus terhadap vektor posisi **r** ¸oleh karenanya **r** menyinggung lingkaran yang radiusnya | **r** |, akibatnya

$$|\mathbf{F}(x, y)| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}y\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}x\right)^2} = \tfrac{1}{2}|\mathbf{r}|$$



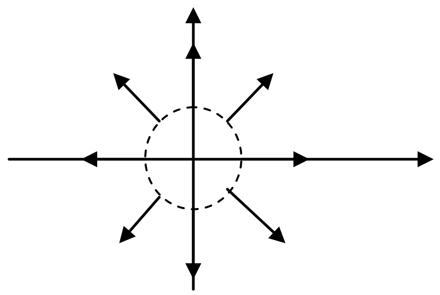
Contoh 5

Buatlah sketsa sebuah contoh vektor yang cocok dari medan vektor

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Jawab

Medan vektor **F** adalah vektor yang arahnya sama dengan vektor posisi **r** tapi panjangnya satu.



1.2 Divergensi Dari Medan Vektor

Misalkan **F**(x, iy, z) = M(x, y, z)**i** + N(x, y, z)**j** + P(x, y, z)**k** adalah medan vektor. Divergensi **F** didefinisikan

$$\text{div } \mathbf{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{dy} + \frac{\partial P}{\partial z}$$

asalkan $\frac{\partial M}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial y}$, dan $\frac{\partial P}{\partial \mathrm{z}}$ ada.

Operator gradien ∇ (dibaca del) didefinisikan $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ **.** Bilamana operator ∇ beroperasi pada suatu fungsi skalar *f* akan menghasilkan gradien *f*, yaitu

$$\nabla f = \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

Buktikan div **F** = ∇ **. F**

Medan Vektor Konservatif

Misalkan $f(x, y, z)$ suatu medan skalar dan *f* dapat dideferensialkan. Maka gradien *f* adalah medan vektor

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

disebut **medan vektor konservatif**, dan *f* disebut fungsi potensial.

Contoh 6

Hitung divergensi dari $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

Jawab

div **F** = $2x - 2x + 2yz = 2yz$

Contoh 7

Buktikan bahwa **F** = x^2**i** + y^2**j** + z^2**k** adalah medan vektor konservatif

Jawab

Untuk membuktikan **F** medan vektor konservatif maka harus dicari fungsi potensial *f*. Oleh karena itu,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 \Rightarrow f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + g(y,\ z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y^2 = \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow g(y, z) = \frac{1}{3}y^3 + h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = z^2 = \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{dh}{dz} \Rightarrow h(z) = \frac{1}{3}z^3 + c$$

Jadi,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 + c$$

Karena *f* adalah fungsi potensial, maka **F** terbukti medan vektor konservatif.

1.3 Curl/Rotasi Dari Medan Vektor

Selanjutnya curl dari Medan Vektor **F** didefinisikan

$$\text{curl } \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Berdasarkan definisi di atas, maka dapat ditunjukkan bahwa

$$\nabla \times \mathbf{F} = \text{rot } \mathbf{F}$$

Sifat-sifat Divergensi dan Rotasi

Misalkan turunan parsial yang diperlukan ada dan kontinu, maka berlaku sifat-sifat sebagai berikut:

1. div (curl **F**) = 0
2. curl (grad *f*) = 0
3. div (*f* **F**) = *f* (div **F**) + (grad *f*) **.** **F**
4. curl (*f* **F**) = *f* (curl **F**) + (grad *f*) × **F**
5. div (**F** × **G**) = **G .** curl **F** – **F .** curl **G**
6. div ($\nabla f \times \nabla g$) = 0

Contoh 8

Hitung div (curl **F**), untuk **F** = cos *y* **i** + sin *z***j** + 3**k**.

Jawab

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \cos y & \sin z & 3 \end{vmatrix} = \cos z\ \mathbf{i} + \sin y\ \mathbf{k}$$

div (curl **F**) = 0

Pertemuan : 6 / Ujian Tengah Semester
Bahan Uji : Bab I dan Bab II
Waktu : 150 Menit

UJIAN TENGAH SEMESTER
KALKULUS VEKTOR

Jawablah semua pertanyaan di bawah ini dengan penjelasan yang sistematis dan logis. Apabila menggunakan dalil/teorema, maka sebutkan teoremanya/tidak hanya menyebutkan nomor teoremanya.

1. Buktikan dengan menggunakan konsep vektor bahwa garis yang menghubungkan titik-titik tengah dua sisi segitiga sebarang, selalu sejajar dengan sisi ketiga!

2. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik A(0, 3, 1), B(-1, 2, - 4), dan C(2, 1, 3)!

3. Tentukan κ, komponen tangensial, komponen normal, binormal dari vektor $\mathbf{r}(t) = (2t + 1)\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j}$ di $t = 1$.

4. Buktikan untuk medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x \cos y\mathbf{i} + e^x \sin y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ adalah medan vektor konservatif.

5. Diberikan medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$. Hitung divergensi dan rotasi medan vektor tersebut!

6. Misalkan turunan parsial yang diperlukan ada dan kontinu. Maka buktikan:
   a. div $(f\,\mathbf{F}) = f\,(\text{div}\,\mathbf{F}) + (\text{grad}\,f)\,.\,\mathbf{F}$
   b. div $(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G}\,.\,\text{curl}\,\mathbf{F} - \mathbf{F}\,.\,\text{curl}\,\mathbf{G}$

7. Misalkan $\mathbf{F}(x, y, z) = f(r)\mathbf{r}$, dengan $r = |\,\mathbf{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dan f adalah fungsi skalar yang dapat dideferensialkan kecuali di $r = 0$.