Pertemuan : 7
Materi : Integral Garis dan Teorema Dasar Integral Garis
Bab III. Integral Kalkulus Dari Vektor

Standar Kompetensi :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Memahami Integral Kalkulus dari Vektor.
2. Memahami Integral Garis, Kerja, dan Teorema Kebebasan Tapak

Kompetensi Dasar :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :
1. Menyebutkan kembali pengertian integral kalkulus dari sebuah vektor.
2. Menyebutkan kembali pengertian integral garis.
3. Membuktikan teorema dasar integral garis.
4. Menghitung integral kalkulus vektor dengan pengertian integral garis.
5. Menyebutkan kembali pengertian kerja.
6. Menghitung kerja sebuah benda yang bergerak sepanjang lintasan.

Uraian Materi
1.1 Integral Garis
Generalisasi integral tentu $\int_a^b f(x)dx$ diperoleh dengan mengganti interval $[a, b]$ dengan suatu kurva atau lintasan *C*, yang disebut sebagai integral garis.

Definisi Integral Garis

Misalkan *C* suatu kurva pada bidang mulus, *C* diberikan secara parameter oleh

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ a \leq t \leq b.$$

dengan x' dan y' kontinu dan tidak serentak nol pada $[a, b]$. Andaikan *C* berorientasi positif (arahnya berpadanan dengan pertambahan *t*) sederhana. Jadi, titik pangkal *C* di $(x(a), y(a))$ dan titik ujungnya di $(x(b), y(b))$. Partisikan selang $[a, b]$ menjadi

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

Maka integral garis pada kurva *C* didefinisikan

$$\int_C f(x,y)ds = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)\Delta s_i$$

Untuk perhitungan definisi di atas tidak memberikan cara yang baik, untuk memperoleh perhitungan yang baik sajikan dalam parameter *t*.

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$$

Contoh 9

Hitung integral garis $\int_C (x^3 + y)ds$; dengan C adalah kurva $x = 3t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 1$.

Jawab

$x = 3t \Rightarrow x' = 3$ dan $y = t^3 \Rightarrow y' = 3t^2$

$f(x, y) = x^3 + y \Leftrightarrow f(t) = 27t^3 + t^3 = 28t^3$, maka

$$\int_C (x^3 + y)ds = \int_0^1 28t^3\sqrt{9 + 9t^4}dt = 84\int_0^1 t^3\sqrt{1 + t^4}dt$$

$$= \frac{84}{4}\frac{2}{3}(1 + t^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{42}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Contoh 10

Tentukan massa kawat yang kerapatannya $\delta(x, y, z) = kz$ jika kawat tersebut berbentuk heliks C dengan parameterisasi

$$x = 3\cos t\,, y = 3\sin t, z = 4t, 0 \le t \le \pi$$

Jawab

$$m = \int_C kzds = k\int_0^\pi 4t\sqrt{9sin^2t + 9cos^2t + 16}\,dt$$

$$= 20k\int_0^\pi tdt = \left[20k\frac{t^2}{2}\right]\Big|_0^\pi = 10k\pi^2$$

1.2 Kerja

Misalkan gaya yang bekerja pada suatu titik (x, y, z) dalam ruang diberikan oleh medan vektor $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$ dengan M, N, dan P kontinu, maka kerja W yang dilakukan $\mathbf{F}$ dalam memindahkan sebuah partikel/benda menelusuri kurva C didefinisikan

$$W = \int_C \mathbf{F}.\mathbf{T}\,ds = \int_C \mathbf{F}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{dt}dt = \int_C \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r}$$

Apabila $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, maka $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ sehingga

$$W = \int_C Mdx + Ndy + Pdz$$

Contoh 11

Tentukan kerja yang dilakukan oleh medan gaya $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ dalam memindahkan sebuah partikel yang menelusuri kurca $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 2$.

Jawab

$$W = \int_C y dt + z2tdt + x3t^2 dt = \int_0^2 t^2 dt + 2t^4 dt + 3t^3 dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{2}{5}t^5 + \tfrac{3}{4}t^4\right]\Big|_0^2 = \frac{8}{3} + \frac{64}{5} + 12 = 27\frac{7}{15}$$

Teorema Dasar Integral Garis

Andaikan C kurva mulus sepotong-sepotong yang secara parameter diberikan oleh $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$, yang dimulai di $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ dan berakhir di $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$. Jika f dapat dideferensialkan secara kontinu pada suatu himpunan terbuka yang mengandung C, maka

$$\int_C \nabla f(\mathbf{r}).\, d\mathbf{r} = f(b) - f(a)$$

Contoh 12

Diketahui $f(x, y, z) = f(\mathbf{r}) = \frac{c}{|\mathbf{r}|} = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. dan $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{c\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$. Hitung $\int_C \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r}$ apabila C adalah kurva mulus sepotong-sepotong dari (0, 3, 0) ke (4, 3, 0).

Jawab

Karena $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$, maka menurut teorema dasar integral garis

$$\int_C \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r} = \int_C \nabla f.\, d\mathbf{r} = \int_{(0,3,0)}^{(\mathbf{4,3,0})} \nabla f.\, d\mathbf{r} = f(4,3,0) - f(0,3,0) = -\frac{2c}{15}$$

Pertemuan : 8
Materi : Kebebasan Tapak dan Teorema Bebas Tapak
Bab III. Integral Kalkulus Dari Vektor

Standar Kompetensi :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :

1. Memahami Integral Kalkulus dari Vektor.
2. Memahami Integral Garis, Kerja, dan Teorema Kebebasan Tapak

Kompetensi Dasar :
Setelah mengikuti perkuliahaan ini mahasiswa diharapkan dapat :

1. Menyebutkan kembali pengertian kebebasan tapak
2. Menghitung integral garis yang bebas tapak.
3. Membuktikan teorema bebas tapak.
4. Menghitung integral garis dengan menggunakan teorema bebas tapak.
5. Membuktikan teorema curl/rotasi.

1.1 Kebebasan Tapak

Andaikan C kurva mulus sepotong-sepotong pada bidang xy, , yang dimulai di ($x(a)$, $y(a)$) dan berakhir di ($x(b)$, $y(b)$), $a \le t \le b$. Maka integral garis $\int_C f(x,y)ds$ disebut **bebas tapak** apabila integral tersebut hanya dipengaruhi oleh titik awal dan titik akhir (tidak dipengaruhi oleh bentuk kurva C). Artinya untuk setiap kurva yang mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama, maka integral garisnya sama.

Teorema A (Teorema Bebas Tapak)

Andaikan $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ kontinu pada suatu himpunan tersambung terbuka D. Maka integral garis $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ bebas tapak jika dan hanya jika $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{r})$ untuk suatu fungsi skalar f ($\mathbf{F}$ adalah medan vektor konservatif).

Contoh 13

Buktikan integral $\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$ bebas tapak, kemudian hitung integral tersebut.

Jawab

Diketahui $\mathbf{F} = (y^2 + 2xy)\mathbf{i} + (x^2 + 2xy)\mathbf{j}$. Maka

$f_x = y^2 + 2xy \Leftrightarrow f(x, y) = y^2x + x^2y + g(y)$

$f_y = x^2 + 2xy = 2yx + x^2 + g'(y) \Leftrightarrow g'(y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = c$

Jadi, terbukti $\mathbf{F}$ bebas tapak karena ada fungsi potensial $f(x, y) = xy^2 + x^2y + c$.

Maka,

$$\int_{(-1,2)}^{(3,1)} (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = f(3,1) - f(-1,2) = 12 - (-2) = 14$$

Akibat Teorema

Pernyataan di bawah ini ekuivalen:

1. **F**(**r**) = ∇f (**r**) untuk suatu fungsi f
2. $\int_C$ **F** . d**r** bebas tapak
3. $\int_C$ **F** . d$\mathbf{r} = 0$ untuk setiap tapak tertutup.

Contoh 14

Hitung $\int_C (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy$, C adalah lingkaran dengan pusat di (0, 0) dan berjari-jari 2, orientasi positif.

Jawab

Dari contoh 13 **F** medan vektor konservatif dan *C* kurva tertutup, maka berdasarkan teorema

$$\int_C (y^2 + 2xy)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$$

Teorema B (Teorema Rotasi)

Andaikan **F** = *M***i** + *N***j** + *P***k** dengan *M*, *N*, dan *P* kontinu bersama-sama dengan turunan parsial tingkat pertamanya ada pada himpunan tersambung *D* dengan tanpa lubang. Maka **F** konservatif jika dan hanya jika rot **F** = 0, yakni

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Contoh 15

Buktikan $\mathbf{F} = (6xy^3 + 2z^2)\mathbf{i} + 9x^2y^2\mathbf{j} + (4xz + 1)\mathbf{k}$ medan vektor konservatif

Jawab

$M = 6xy^3 + 2z^2$, $\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 18xy^2$, $\frac{\partial M}{\partial z} = 4z$

$N = 9x^2y^2, \Rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 18xy^2$, $\frac{\partial N}{\partial z} = 0$

$P = 4xz + 1 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \frac{\partial P}{\partial x} = 4z$

Maka diperoleh rot **F** = 0.

Berdasarkan teorema rotasi, **F** adalah medan vektor konservatif