1.2 Persamaan Parametrik Vektor

Definisi 1.5 Vektor Basis Standar

Vektor basis standar pada $\mathbf{R}^2$ adalah $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$ dan vektor basis standar pada $\mathbf{R}^3$ adalah $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

Untuk setiap vektor pada $\mathbf{R}^2$ dan $\mathbf{R}^3$ dapat dinyatakan dalam vektor basis standar.

Contoh 1

$(2, -1, 3) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

Definisi 1.6 Persamaan Parametrik

Fungsi

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

untuk $a \le t \le b$ adalah persamaan parametrik, untuk setiap $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

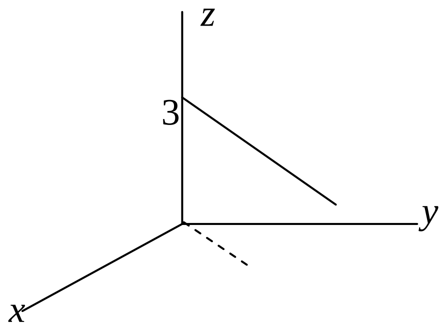
Contoh 2

Himpunan titik-titik (x, y) yang mempunyai persamaan $x = 2\cos t$ dan $y = 2\sin t$ dengan $0 \le t \le 2\pi$ adalah kumpulan titik-titik yang berada pada lingkaran $x^2 + y^2 = 4$.

Persamaan parametrik dapat digunakan untuk menyajikan kurva di $\mathbf{R}^3$. Ingat bahwa persamaan $y = 4$ di $\mathbf{R}^3$ berupa bidang datar yang sejajar dengan bidang xy, tetapi untuk menyajikan suatu kurva di $\mathbf{R}^3$ dapat menggunakan persamaan parametrik.

Contoh 3

Persamaan parametrik $x = t$, $y = 3t$, $z = 3$ adalah garis lurus di $\mathbf{R}^3$.



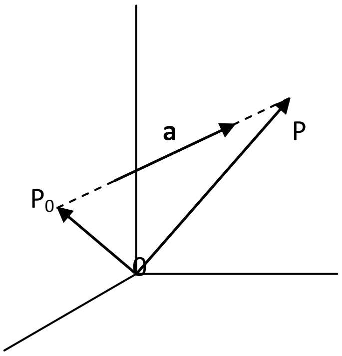
Proposisi 1.1 Persamaan Parametrik Vektor

Persamaan parametrik vektor untuk garis yang melalui titik $P_0(b_1, b_2, b_3)$, dimana vektor posisi $\overrightarrow{OP_0} = \boldsymbol{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ dan paralel vektor $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{j}$ adalah ...

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b} + t\mathbf{a}$$

$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OP} = (a_1t + b_1)\mathbf{i} + (a_2t + b_2)\mathbf{j} + (a_3t + b_3)\mathbf{k}$, sehingga apabila $\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ maka persamaan parametriknya adalah

$$\begin{cases} x = a_1t + b_1 \\ y = a_2t + b_2 \\ z = a_3t + b_3 \end{cases}$$



Bentuk simetris

$$\boxed{\frac{x - b_1}{a_1} = \frac{y - b_2}{a_2} = \frac{y - b_3}{a_3}}$$

Contoh 4

Cari persamaan parametrik vektor yang melalui titik $P_0(1, -2, 3)$ dan $P_1(0, 5, -1)$

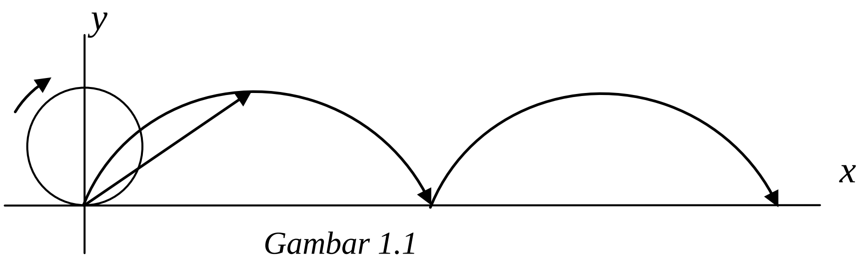
Jawab. $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = (0 - 1, 5 - (-2), -1 - 3) = (-1, 7, -4) = -\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Vektor $\mathbf{b}$ dapat dipilih $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ atau $\mathbf{b} = 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

Sehingga persamaan parametriknya adalah

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 7t \\ z = 3 - 4t \end{cases} \quad atau \quad \begin{cases} x = -t \\ y = 5 + 7t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$$

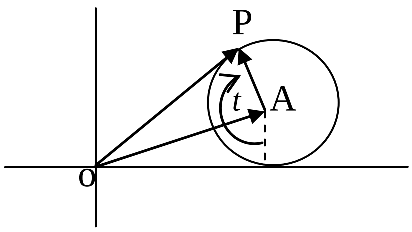
Contoh 5

Cari persamaan parametrik vektor dari cycloid. Cycloid adalah gerakan sebuah titik pada roda berbentuk lingkaran yang menggelinding pada permukaan lantai tanpa selip. Lihat gambar 1.1

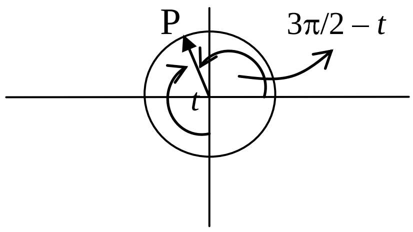


Gambar 1.1

Jawab. Misalkan roda menggelinding setelah *t* radian, sehingga posisi titik P berada pada posisi seperti pada gambar 1.2.



Gambar 1.2



Gambar 1.3

Maka vektor posisi P adalah

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Misalkan jari-jari roda *a* satuan panjang, maka vektor OA = $at\mathbf{i} + a\mathbf{j}$.

Andaikan titik A diletakkan pada pusat seperti tampak pada gambar 1.3, maka vektor

$$\overrightarrow{AP} = a\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\mathbf{i} + a\sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\mathbf{j} = -a\sin t\,\mathbf{i} - a\cos t\,\mathbf{j}$$

Jadi,

$$\overrightarrow{OP} = a(t - \sin t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j}$$

Persamaan parametriknya adalah

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Latihan

1. Tulis dalam vektor basis standar

   a. (1, 5)　　　　c. $(e, 2e^2, -4)$

   b. $(-1, 3, -\pi)$　　　　d. $(\cos t, -\sin t)$

2. Tulis tanpa menggunakan notasi vektor basis standar

   a. $\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$　　　　c. $2(\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$

   b. $4\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$　　　　d. $\frac{1}{2}(4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \pi\mathbf{k})$

3. Misalkan $\mathbf{a}_1 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, -1)$

   a. Cari skalar c_1, c_2, dan c_3 sedemikian sehingga $\mathbf{b} = (5, 6, -5)$ dapat ditulis dalam bentuk $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$

   b. Ulangi soal (a) untuk $\mathbf{b} = (2, 3, 4)$

   c. Dapatkah vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, dan $\mathbf{a}_3$ digunakan sebagai vektor basis seperti halnya **i**, **j**, dan **k**? Mengapa?

4. Tentukan persamaan parametrik vektor untuk garis yang diberikan

   a. Garis di $\mathbf{R}^3$ yang melalui titik (2, –1, 5) yang searah vektor $\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

   b. Garis di $\mathbf{R}^3$ yang melalui titik (2, 1, 1) dan (3, –1, 4)

5. Tuliskan dalam bentuk simetris dari persamaan parametrik pada soal no (4).

6. Bentuk simetris garis di $\mathbf{R}^3$ adalah

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{4}$$

   Tuliskan dalam himpunan persamaan parametrik