Solusi Sistem Persamaan Linear

Bentuk Umum SPL

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
$$

Atau dalam bentuk matriks $AX = b$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_j \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad dan \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Model Penyelesaian

- Operasi Baris Elementer (OBE)
  - Bentuk SPL segitiga (atas atau bawah)
  - Eliminasi Gauss Naif
  - Eliminasi Gauss dengan pivoting parsial
  - Dekomposisi matriks (A = LU)
- Metode Iterasi Jacobi
- Metode Iterasi Gauss-Siedel

SPL dengan Matriks Koefisien Segitiga

Perhatikan SPL dalam bentuk segitiga bawah berikut:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots & \\
a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n &= b_i \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots & \\
a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
$$

Catatan : Matriks segitiga merupakan matriks persegi ; berordo (n x n)

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n} x_{n-1}}{a_{n-1n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{b_{n-2} - a\left\{_{n-2n-1} x_{n-1} + a_{n-2n} x_n\right\}}{a_{n-2n-2}}$$

$$x_j = \frac{b_j - a\left\{_{jj+1} x_{j+1} + a_{jj+2} x_{j+2} + \ldots + a_{jn-1} x_{n-1} x_j + a_{jn} x_n\right\}}{a_{jj}}$$

atau

$$x_j = \frac{b_j - \sum_{k=1}^{n} a_{j\ j+k} x_{j+k}}{a_{jj}}$$

Eliminasi Gauss Naif (tanpa Pivoting)

Perhatikan kembali SPL dengan memisalkan matrik koefisiennya merupakan matriks persegi.

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\
\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Tanpa mengurangi keumuman, pandang SPL dengan matrik koefisien 3 x 3. Dengan operasi gauss naif kita peroleh

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{23}x_3 = b_3$$

$$p_{12} = \frac{a_{21}}{a_{11}}\ dan\ p_{13} = \frac{a_{31}}{a_{11}}, maka$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{22}^{'}x_2 + a_{23}^{'}x_3 = b_2^{'}$$
$$a_{32}^{'}x_2 + a_{33}^{'}x_3 = b_3^{'}$$

$$a_{22}^{'} = a_{22} - a_{12}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right), \quad a_{23}^{'} = a_{23} - a_{13}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$$

$$a_{32}^{'} = a_{32} - a_{12}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right), \quad a_{33}^{'} = a_{33} - a_{13}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$$

$$b_2^{'} = b_2 - b_1\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right), \quad b_3^{'} = b_3 - b_1\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$$

Kemudian

$$p_{23} = \frac{a'_{32}}{a'_{22}}\text{, } maka$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 &= b'_3 \end{aligned}$$

$$a''_{33} = a'_{33} - a'_{23}\left(\frac{a'_{22}}{a'_{23}}\right)$$

Langkah berikutnya lakukan mundur.

Selesaikan sistem persamaan linear berikut dengan eliminasi Gauss naif!

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-(-R_1)]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-(-3R_2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right)$$

Dengan subsitutusi mundur, maka diperoleh :

$$-5x_3 = -15 \Leftrightarrow x_3 = 3$$

$$-2x_2 - x_3 = -7 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-7+2}{-2} = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+(3-6)}{2} = 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah (1, 2, 3)

Eliminasi Gauss dengan Pivoting

Dua cara pivoting:

1. Pivoting sebagian (Partial pivoting)
2. Pivoting lengkap (Complete pivoting)

Pivoting lengkap jarang dipakai, karena kerumitan dalam menyusun program komputernya

Pada pivoting sebagian, pivot (elemen utama) dipilih dari semua elemen pada kolom p yang mempunyai nilai mutlak terbesar,

$$|a_{k,p}| = maks\{|a_{p,p}|, |a_{p+1,p}|, |a_{p+2,p}|, \ldots, |a_{n-1,p}|, |a_{n,p}|\}$$

Kemudian tukarkan baris ke-k, dengan baris ke-p

Perhatikan kembali contoh pada eliminaso Gauss naif

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\
4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\
-2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1
\end{aligned}
$$

Jawab:

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{array}\right) \sim
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -\dfrac{5}{2} & \dfrac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Dengan substitusi mundur, maka diperoleh himpunan penyelesaiannya adalah (1, 2, 3).

Hasilnya sama dengan eliminasi Gauss naif (tanpa pivoting)

Dekomposisi LU

Sebuah matriks persegi A yang non singular dapat difaktorkan (dekomposisi) menjadi perkalian dua matriks segitiga L (lower) dan U (upper), yakni

$$A = LU$$

artinya

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n-1} & a_{nn} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n-1} & a_{3n} \\ \ldots & \ldots. & \ldots & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{n\,n-11} & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & \ldots & l_{n\,n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ldots & u_{2n-1} & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & u_{3\,n-1} & u_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Dengan dekomposisi tersebut, maka kita dapat menyelesaikan sistem persamaan linear Ax = b.

$$
\begin{aligned}
&Ax = b, maka \\
&LUx = b
\end{aligned}
$$

Dengan memisalkan Ux = y, maka diperoleh Ly= b.
Langkah pertama digunakan metode substitusi maju untuk menyelesaikan SPL Ly = b,
Langkah kedua digunakan metode substitusi mundur untuk menyelesaikan SPL Ux = y.

Menyusun A = LU

Cara yang paling baik digunakan untuk memfaktorkan A menjadi perkalian L dan U adalah metode Gauss. Selain itu Ada 3 cara lain yang juga banyak dipakai, yakni

1. Crout
2. Doolitle
3. Cholesky

Eliminasi Gauss

1. Kita tulis A = IA
2. Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas (U), dan tempatkan bilangan pengali pada posisi l_{ij} di matriks I. p_{ij}
3. Setelah proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi L, dan matriks A disebelah kanan menjadi U.

Perhatikan kembali contoh soal pada eliminasi Gauss naif.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-(-R_1)]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-(-3R_2)} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad dan \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$