Hardwiyanto Utomo

060545

4.3 Sampling dari distribusi normal dan estimasi likelihood maksimum

Likelihood normal multivariat

Kita asumsikan vektor $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ dengan $p \times 1$ merepresentasikan sampel acak dari populasi normal multivariat dengan rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan kovarian matrik Σ. Karena $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ satu sama lain independen dan berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, fungsi kepadatan bersama dari semua observasi merupakan produk dari kepadatan normal marginal, yaitu

$$\left\{\begin{matrix}\text{kepadatan bersama} \\ \text{dari } \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n\end{matrix}\right\} = \prod_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-(x_j - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (x_j - \boldsymbol{\mu})/2} \right\} \qquad (4\text{-}11)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} e^{-\sum_{j=1}^{n} (x_i - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (x_i - \boldsymbol{\mu})/2}$$

Saat nilai kuantitatif dari observasi tersedia, dan disubtitusi ke $\mathbf{x}_j$ pada (4-11). Hasil yang diperlihatkan, diperhatikan sebagai fungsi dari $\boldsymbol{\mu}$ dan Σ untuk himpunan yang ditetapkan dari observasi $x_1, x_2, ..., x_n$ disebut *likelihood*. Pada bab ini kita akan banyak menggunakan trace dari suatu matrik kuadrat.

Akibat 4.9. Diberikan **A** matrik $k \times k$ dan **x** vector $k \times 1$.

a. $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = tr(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}) = tr(\mathbf{A}\mathbf{x}'\mathbf{x})$

b. $tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$, dimana λ_i adalah nilai eigen dari **A**.

Proof. Untuk (a) pertama kita tuliskan $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ sebagai skalar, sehingga $\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x} = tr(\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x})$ kita punya bahwa $tr(\mathbf{CB}) = tr(\mathbf{BC})$ untuk setiap matrik **B** dan **C** dengan $m \times k$ dan $k \times m$. Diagonal elemen dari **BC** adalah $\sum_{j=1}^{k} b_{ij} c_{ji}$, sehingga $tr(\mathbf{BC}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij} c_{ji} \right)$. Hal ini serupa dengan diagonal elemen dari **CB** adalah $\sum_{i=1}^{m} b_{ij}c_{ji}$, sehingga kita punya $tr(\mathbf{CB}) = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij}c_{ji}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij}c_{ji}\right) = tr(\mathbf{BC})$. Kita misalkan $\mathbf{x}'$ adalah **B** dengan m = 1 dan **Ax** adalah **C**, maka $\mathbf{x}'\mathbf{Ax} = tr\left(\mathbf{x}'\mathbf{Ax}\right) = tr\left(\mathbf{Ax}'\mathbf{x}\right)$.

Untuk (b), misalkan $\mathbf{A} = \mathbf{P}'\mathbf{BP}$, dimana $\mathbf{PP}' = \mathbf{I}$ dan **B** adalah matrik diagonal dengan entri-entrinya adalah $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$. Kita juga punya $tr\left(\mathbf{A}\right) = tr\left(\mathbf{P}'\mathbf{BP}\right) = tr\left(\mathbf{BPP}'\right) = tr\left(\mathbf{B}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$

Eksponen dari kepadatan bersama pada (4-11), dapat disederhanakan.

$$\begin{aligned}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right) &= tr\left[\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)\right] \\ &= tr\left[\Sigma^{-1}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)'\right]\end{aligned} \tag{4-12}$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)'\Sigma^{-1}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right) &= \sum_{i=1}^{n} tr\left[\Sigma^{-1}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)'\right] \\ &= tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)'\right)\right]\end{aligned} \tag{4-13}$$

Karena trace dari jumlah matrik sama dengan jumlah trace dari matrik tersebut, sehingga kita dapat menambah atau mengurangi dengan $\bar{x}$ pada bentuk $\left(x_j - \boldsymbol{\mu}\right)$ maka akan memberikan

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_j - \bar{x} + \bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)\left(x_j - \bar{x} + \bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)\left(x_j - \bar{x}\right)' + n\left(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)\left(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)' \tag{4-14}$$

Karena cross-product dari, $\sum_{i=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)\left(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)'$ dan $\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)\left(x_j - \bar{x}\right)'$ adalah keduanya matrik nol, kita punya bentuk fungsi kepadatan bersama suatu sampel acak yang berasal dari populasi yang berdistribusi normal multivariat yaitu:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} e^{-tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)\left(x_j - \bar{x}\right)' + n\left(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)\left(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}\right)'\right)\right]/2} \tag{4-16}$$

Fungsi di atas lebih dikenal dengan nama fungsi likelihood (ini setelah dimasukkan nilai-nilai dari $x_1, x_2, ..., x_n$).

Estimasi $\boldsymbol{\mu}$ dan Σ untuk maksimum likelihood

Akibat 4.10. Diberikan matrik **B** terbatas positif dan simetri $p \times p$ dan $b > 0$ skalar.

$$\frac{1}{|\Sigma|^b} e^{tr(\Sigma^{-1}\mathbf{B})/2} \le \frac{1}{|\mathbf{B}|^b} (2b)^{pb} e^{-bp}$$

Untuk setiap $\underset{p \times p}{\Sigma}$ terbatas positif, dengan memegang kesamaan tersebut hanya untuk

$\Sigma = (1/2b)\mathbf{B}$.

Estimasi $\boldsymbol{\mu}$ dan Σ untuk maksimum likelihood dinotasikan $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ dan $\hat{\Sigma}$ merupakan nilai maksimum dari fungsi $L(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ pada (4-16). $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ dan $\hat{\Sigma}$ akan tergantung pada nilai $x_1, x_2, ..., x_n$ yang melewati ringkasan statistik $\bar{x}$ dan S.

Akibat 4.11. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ adalah sampel acak yang berasal dari populasi normal dengan rata-rata $\boldsymbol{\mu}$ dan kovarian Σ. Maka

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{\mathbf{X}} \quad \text{dan} \quad \bar{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})' = \frac{(n-1)}{n} S$$

adalah estimator dari $\boldsymbol{\mu}$ dan Σ untuk maksimum likelihood. Nilai observasi mereka, $\bar{x}$ dan $(1/n)\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})'$, dikatakan estimasi untuk $\boldsymbol{\mu}$ dan Σ pada maksimum likelihood.

Proof. Pada persamaan likelihood (4-16) kita punya bagian dari faktor perkalian -$\frac{1}{2}$ yaitu:

$$tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})'\right)\right] + n(\bar{x} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{x} - \boldsymbol{\mu})$$

Dari akibat 4.1, Σ^{-1} terbatas positif, jadi jarak $(\bar{x} - \boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\bar{x} - \boldsymbol{\mu}) > 0$ kecuali untuk $\boldsymbol{\mu} = \bar{x}$. Sehingga fungsi likelihood menjadi maksimum saat $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \bar{x}$ sehingga kita tinggal memaksimumkan

$$L(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{np/2} |\Sigma|^{n/2}} e^{-tr\left[\Sigma^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_j - \bar{x})(x_j - \bar{x})' +\right)\right]/2}$$

terhadap Σ^{-1}. Dengan menggunakan akibat 4.10 dimana b = n/2 dan $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$,

hasil maksimumnya saat $\hat{\Sigma} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})'$ dibentuk.

Estimator pada maksimum likelihood adalah sebuah jumlah acak. Estimator ini didapat dengan menggantikan pengamatan $x_1, x_2, ..., x_n$ yang merupakan ekspresi untuk $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ dan $\hat{\Sigma}$ dengan vektor acak $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$.

Kita nyatakan estimator dari maksimum likelihood $\bar{\mathbf{X}}$ sebagai vektor acak dan estimator dari maksimum likelihood $\hat{\Sigma}$ sebagai vektor matrik. Estimasi maksimum likelihood merupakan nilai terpilih yang diberikan oleh suatu data. Dari penjelasan di atas kita dapatan maksimum dari fungsi likelihood adalah

$$L\left(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \hat{\Sigma}\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^{np/2}} e^{-np/2} \frac{1}{|\hat{\Sigma}|^{n/2}} \qquad (4\text{-}18)$$

Statistik cukup

Diberikan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ sampel acak dari populasi normal multivariat dengan $\boldsymbol{\mu}$ dan kovarian Σ. Maka

$\bar{\mathbf{X}}$ dan **S** merupakan *statistik cukup* (4-21)

4.4 DISTRIBUSI SAMPLING DARI $\overline{X}$ dan S

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n} \\ \vdots & & & \\ X_{p1} & X_{p2} & \cdots & X_{pn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}$$

X matriks dengan ordo p x n , diketahui $\overline{x}$ dan S statistic cukup univariate

Merupakan sampel random dari populasi normal dengan mean μ dank kovarians matriks Σ

- Untuk distibusi normal univariat

> $\overline{X}$ normal dengan mean μ = mean populasi dan variansi
> $\frac{1}{n}\sigma^2 = \frac{\text{variansi populasi}}{\text{ukuran sampel}}$

Bukti :

X berdistribusi normal univariat dengan mean μ dan variansi σ^2 .

$$M_x(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$X_1, \ldots, X_n$ sampel random dari populasi normal univariat dengan mean μ dan variansi σ^2 .

$$M_{xi}(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

$$M_{\bar{x}}(t) = M_{\Sigma\frac{x_i}{n}}(t) = \left[M_{x_i}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n$$

$$= \left[e^{t\frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n^2}} \right]^n$$

$$= \left[e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n}} \right]^n$$

Jadi X berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi $\frac{\sigma^2}{n}$

- Untuk disribusi normal multivariate

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{X} \sim N_p(\mu, \Sigma) \\ \overline{\mathrm{X}} \sim N_p\left(\mu, \frac{1}{n}\Sigma\right) \end{array}}$$

Bukti :

$$\mathrm{X} \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

$$\mathrm{M}_x\,(\mathrm{t}) = e^{\mathrm{t}'\mu + \frac{1}{2}\mathrm{t}'\Sigma\mathrm{t}}$$

$\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2 \ldots, \mathrm{X}_n$ sampel random dari distribusi normal p variat dengan mean μ dan kovarians Σ.

$$\mathrm{M}_{x_i}\,(\mathrm{t}) = e^{\mathrm{t}'\mu + \frac{1}{2}\mathrm{t}'\Sigma\mathrm{t}} \qquad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\mathrm{M}_{\bar{x}}\,(\mathrm{t}) = \mathrm{M}_{\sum\frac{\mathrm{x_i}}{\mathrm{n}}}\,(\mathrm{t})$$

$$= \left[\mathrm{M}_{\mathrm{x_i}}\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$

$$= \left(e^{t'\frac{\mu}{n} + \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{t}'\Sigma\mathrm{t}}{\mathrm{n}^2}}\right)^n$$

$$= e^{t'\mu + \frac{1}{2}\mathrm{t}'\frac{\Sigma}{\mathrm{n}}t}$$

Jadi $\overline{\mathrm{X}}$ berdistribusi normal dengan mean μ dan variansi $\frac{1}{n}\Sigma$

- Untuk variansi sampel dari populasi normal univariat

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \bar{x}\right)^2 \text{ berdistribusi}$$

$(n-1)S^2$ berdistribusi identik dengan $\sigma^2\left(z_1{}^2 + \ldots + z_{n-1}{}^2\right) = (\sigma\, z_1)^2 + \ldots + (\sigma\, z_{n-1})^2$.

Dimana $z_i \sim N_p(\mu, \Sigma)$ atau $\sigma z_i \sim N(0, \sigma^2)$

- Untuk populasi normal multivariate

  Bila $z_j \sim N_p(\mu, \Sigma)$ j = 1, … ,n

  $\sum_{j=1}^{n} z_j z_j'$ berdistribusi Wishart dengan derajat bebas n-1 diberi notasi W

1. Sifat – sifat distribusi Wishart
   1. Densitas wishart tidak ada bila $n \leq$ p

      Bila ada harganya untuk matriks definit positif A adalah :

$$W_{n-1}(A/\Sigma) = \frac{|\mathrm{A}|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} e^{-\frac{1}{2} tr\, A} \Sigma^{-1}}{2^{\frac{1}{2}p(n-1)} \pi^{p(p-1)/4} |\Sigma|^{(n-1)/2} \prod_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{2}(n-i) \right)}$$

   2. $\mathrm{A}_1 \sim \mathrm{W}_{m1}(\mathrm{A}_1 | \Sigma)$

      $\mathrm{A}_2 \sim \mathrm{W}_{m2}(\mathrm{A}_2 | \Sigma)$. A_1 dan A_2 independen

      $A_1 + A_2 \sim \mathrm{W}_{m1} + \mathrm{W}_{m2}(\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2 | \Sigma)$

   3. $\mathrm{A} \sim \mathrm{W}_m(\mathrm{A} | \Sigma)$

      $\mathrm{C\,A\,C'} \sim \mathrm{W}_m(.| \mathrm{C} \Sigma \mathrm{C'})$

4.5 DISTRIBUSI $\overline{\mathrm{X}}$ dan S UNTUK SAMPEL BESAR

Teorema Limit Pusat

$\mathrm{X}_{1,}\, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ Sampel random dari distribusi dengan mean μ dan kovariansi Σ maka $\sqrt{n}\left(\overline{\mathrm{X}} - \mu\right)$ berdistribusi mendekati $N_p(0, \Sigma)$. Untuk n besar

Teorema

Bila $\overline{\mathrm{X}}$ mendekati normal dengan mean μ dan kovarian matriks $\frac{1}{n}\Sigma$ maka

$n\left(\overline{\mathrm{X}} - \mu\right)' \Sigma^{-1}\left(\overline{\mathrm{X}} - \mu\right)$ mendekati χ^2p