BAB III

ISI

4.2 Kepadatan Normal Multivariat dan Sifat-sifatnya

Kepadatan normal multivariat merupakan generalisasi dari kepadatan normal univariat untuk dimensi $p \geq 2$.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-[(x-\mu)/\sigma]^2/2} \qquad -\infty < x < \infty \qquad (3\text{-}1)$$

$$\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 = (x-\mu)\left(\sigma^2\right)^{-1}(x-\mu). \qquad (3\text{-}2)$$

Bentuk (3-2) di atas pada fungsi kepadatan normal univariat menunjukan besaran jarak yang dikuadratkan dari x ke μ pada satuan standar deviasi. Bentuk ini dapat digeneralisasi untuk vektor $\boldsymbol{x}$ ($p \times 1$) dari suatu observasi pada beberapa variabel sebagai

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \qquad (3\text{-}3)$$

Vektor $\boldsymbol{\mu}$ dengan $p \times 1$ menunjukkan nilai harapan (ekspektasi) dari vektor acak **X**, dan matrik Σ dengan $p \times p$ merupakan varian-covarian matrik. Disini diasumsikan Σ terbatas positif, sehingga (3-3) merupakan generalisasi jarak yang dikuadratkan dari $\mathbf{x}$ ke $\boldsymbol{\mu}$.

Kepadatan normal multivariat didapat dengan mengganti jarak pada univariat (3-2) jarak multivariat hasil generalisasi (3-3) pada fungsi kepadatan (3-1). Saat pergantian terjadi, konstanta normal univariat $(2\pi)^{-1/2}\left(\sigma^2\right)^{-1/2}$ juga harus diganti dengan konstanta umum yang membuat suatu *volume* dibawah permukaan fungsi kepadatan multivariat untuk setiap *p*. Hal ini diperlukan karena pada multivariat, probabilitas digambarkan oleh volume dibawah permukaan pada daerah yang didefinisikan oleh interval dari nilai x_i. Konstanta yang menggantikannya adalah $(2\pi)^{-p/2}|\Sigma|^{-1/2}$, kepadatan normal pada dimensi *p* untuk vektor acak $\mathbf{X} = [X_1, X_2, ..., X_p]'$ memiliki bentuk

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} |\Sigma|^{1/2}} e^{-(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})/2} \tag{3-4}$$

dimana $-\infty < x_i < \infty$, bentuk ini akan diotasikan dengan $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Pada persamaan (3-4) jelaslah bahwa alur atau garis edar dari nilai **x** yang merupakan konstanta ketinggian untuk kepadatan adalah sebuah elipsoid. Sehingga kepadatan normal multifariat adalah sebuah konstanta dimana:

Peta kepadatan kemungkinan konstan = {all $\mathbf{x} \ni (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = c^2$ }

= permukaan dari elipsoida dengan titik pusat $\boldsymbol{\mu}$.

Titik-titik pada elipsoid dari suatu kepadatan normal adalah suatu vektor eigen berarah dari Σ^{-1} dan panjangnya adalah akar nilai eigen dari Σ dikali dengan akar dari *c*.

Akibat 1. Jika Σ terbatas positif sehingga terdapat Σ^{-1},

$$\Sigma\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e} \text{ menyebabkan } \Sigma^{-1}\mathbf{e} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{e}$$

jadi (λ, e) adalah pasangan nilai dan vektor eigen dari Σ yang berhubungan dengan pasangan $(1/\lambda, e)$ untuk Σ^{-1}. Dimana Σ^{-1} juga terbatas positif.

Proof. Untuk Σ terbatas positif dan $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ adalah vektor eigen, kita punya $0 < \mathbf{e}'\Sigma\mathbf{e}$ = $\mathbf{e}'(\Sigma\mathbf{e})$ = $\mathbf{e}'(\lambda\mathbf{e}) =$ $\lambda\mathbf{e}'\mathbf{e}$ = λ. Selain itu $\mathbf{e}$ = $\Sigma^{-1}\Sigma\mathbf{e}$ = $\Sigma^{-1}\lambda\mathbf{e}$ = $\lambda\Sigma^{-1}\mathbf{e}$ dan jika dibagi dengan $\lambda > 0$ memberikan $\Sigma^{-1}\mathbf{e} = (1/\lambda)\mathbf{e}$. Sekarang untuk

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}'\Sigma^{-1}\mathbf{x} &= \mathbf{x}'\left(\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i'\right)\mathbf{x} \\
&= \sum_{i=1}^{p}\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)(\mathbf{x}'\mathbf{e}_i)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

$\lambda_i^{-1}(\mathbf{x}'\mathbf{e}_i)^2 \geq 0$ sehingga $\mathbf{x}'\mathbf{e}_i = \mathbf{0}$ untuk setiap *i* jika dan hanya jika $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Jadi

$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, menyebabkan $\sum_{i=1}^{p}(1/\lambda_i)(\mathbf{x}'\mathbf{e}_i)^2 > 0$ dan Σ^{-1} terbatas positif.

<u>Dibawah ini merupakan ringkasan konsep diatas</u>

Kontur dari kepadatan konstan untuk distribusi normal pada dimensi p adalah sebuah elipsoid dengan **x** variabelnya sehingga

$$(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) = c^2 \qquad (3\text{-}5)$$

Ellipsoid ini berpusat pada $\boldsymbol{\mu}$ dan memiliki titik kooardinat $\pm c\sqrt{\lambda_i}\mathbf{e}_i$ dimana $\Sigma\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$,

i = 1, 2, ..., p.

Contoh soal

Kita harus mendapatkan titik koordinat dari contour probabilitas density saat $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ dari (3-5) titik yang kita cari diberikan oleh nilai eigen dan vektor eigen Σ. Disini $|\Sigma - \lambda\mathbf{I}| = 0$ menjadi

$$0 = \begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11}-\lambda \end{vmatrix} = (\sigma_{11}-\lambda)^2 - \sigma_{12}^2$$

$$= (\lambda - \sigma_{11} - \sigma_{12})(\lambda - \sigma_{11} + \sigma_{12})$$

Konsekuensinya**,** nilai eigennya $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ dan $\lambda_2 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$**.** Vektor eigennya didapat dari

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = (\sigma_{11}+\sigma_{12})\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

atau

$$\sigma_{11}e_1 + \sigma_{12}e_2 = (\sigma_{11}+\sigma_{12})e_1$$

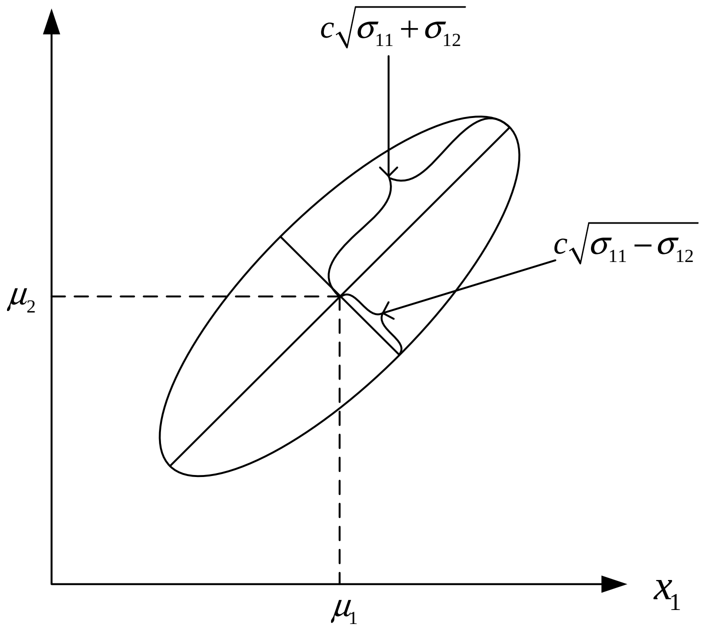
$$\sigma_{12}e_1 + \sigma_{11}e_2 = (\sigma_{11}+\sigma_{12})e_2$$

Persamaan ini mengakibatkan $e_2 = e_1$ dan setelah normalisasi pasangan nilai eigen dan vektor eigen adalah

$$\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}, \qquad e_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama $\lambda_1 = \sigma_{11} - \sigma_{12}$ menghasilkan $e'_2 = \left[1/\sqrt{2}, \quad -1/\sqrt{2}\right]$.

Saat kovarian σ_{12} (korelasi ρ_{12}) bernilai positif, $\lambda_1 = \sigma_{11} + \sigma_{12}$ adalah nilai eigen tebesar dan dihubungankan dengan $e'_1 = \left[1/\sqrt{2}, \quad 1/\sqrt{2}\right]$ terletak bersama dalam 45^0 melewati titik $\boldsymbol{\mu}' = [\mu_1, \mu_2]$. Hal ini aka benar untuk setiap nilai positif dari kovarian.



Gambar 1. Kontur untuk distribusi normal bivariat dengan $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ dan $\sigma_{12} > 0$

Untuk merangkumnya, titik pada elips dari suatu kepadatan konstan untuk distribusi normal bivariat dengan $\sigma_{11} = \sigma_{22}$ dapat ditentukan oleh

$$\pm c\sqrt{\sigma_{11}+\sigma_{22}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \pm c\sqrt{\sigma_{11}-\sigma_{22}}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Akibat 2. **J**ika **X** berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, maka setiap kombinasi linier dari variabel **a'X** = $a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_pX_p$ akan berdistribusi

$N_p(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a})$. Demikian juga jika **a’X** berdistribusi $N_p(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\Sigma\mathbf{a})$ untuk setiap **a**, maka $\mathbf{X}$ berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$.

Proof. Disini hanya akan dibuktikan untuk $E(aX_1) = \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}$

$E(aX_1) = aE(X_1) = a\mu_1$.

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a}'\mathbf{X}) &= E(a_1X_1 + a_2X_2 + ... + a_nX_n) \\ &= E(a_1X_1) + E(a_1X_1) \\ &= a_1E(X_1) + a_1E(X_1) \\ &= a_1\mu_1 + a_1\mu_1 \\ &= [a_1, a_1, ..., a_1]\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

Contoh

$\mathbf{a}' = [1, 0, ..., 0]$

$$\mathbf{a}'\mathbf{X} = [1, 0, ..., 0]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = X_1$$

$$\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu} = [1, 0, ..., 0]\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu_1$$

$$\mathbf{a}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{a} = [1, 0, ..., 0]\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_{11}$$

Melalui <u>akibat 2</u> kita dapatkan bahwa X_1 berdistribusi $N(\mu_1, \sigma_{11})$. Hal ini dapat diperumum jika untuk X_i maka distribusinya akan $N(\mu_i, \sigma_{ii})$.

Akibat 3. **J**ika $\mathbf{X}$ berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, q kombinasi linier dari

$$\underset{q\times p}{\mathbf{A}}\;\underset{p\times 1}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} a_{11}X_1 + \ldots + a_{1p}X_p \\ a_{21}X_1 + \ldots + a_{2p}X_p \\ \vdots \\ a_{q1}X_1 + \ldots + a_{qp}X_p \end{bmatrix}$$

akan berdistribusi $N_p\left(\mathbf{A\mu}, \mathbf{A}\sum\mathbf{A}'\right)$. Begitu juga untuk $\underset{(p\times 1)}{\mathbf{X}} + \underset{(p\times 1)}{\mathbf{d}}$**,** dimana **d** adalah vektor konstanta, akan berdistribusi $N_p\left(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{d}, \sum\right)$.

Contoh:

Diberikan **X** berdistribusi $N_3\left(\boldsymbol{\mu}, \sum\right)$, cari distribusi untuk

$$\begin{bmatrix} X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \mathbf{AX}$$

Dari akibat 3, distribusi dari $\mathbf{AX}$ adalah normal multivariat dengan rata-rata

$$\mathbf{A\mu} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - \mu_2 \\ \mu_2 - \mu_3 \end{bmatrix}$$

dan kovariannya

$$\mathbf{A}\sum\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} - 2\sigma_{12} + \sigma_{22} & \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} + \sigma_{23} - \sigma_{22} - \sigma_{13} & \sigma_{22} - 2\sigma_{23} + \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Alternatif lainnya kita dapat mencari vektor rata-rata dan covarian kita dapat mengubah terlebih dahulu dalam bentuk $Y_1 = X_1 - X_2$ dan $Y_2 = X_2 - X_3$.

Akibat 4. Semua subset dari **X** berdistribusi normal. Jika kits partisi **X,** rata-rata dan covariannya akan berbentuk

$$\underset{p\times 1}{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \underset{(q\times 1)}{\mathbf{X}_1} \\ \hdashline \underset{((p-q)\times 1)}{\mathbf{X}_2} \end{bmatrix} \qquad \underset{(p\times 1)}{\boldsymbol{\mu}} = \begin{bmatrix} \underset{(q\times 1)}{\boldsymbol{\mu}_1} \\ \hdashline \underset{((p-q)\times 1)}{\boldsymbol{\mu}_2} \end{bmatrix} \qquad \underset{(p\times p)}{\Sigma} = \left[\begin{array}{c:c} \underset{(q\times q)}{\Sigma_{11}} & \underset{(q\times(p-q))}{\Sigma_{12}} \\ \hdashline \underset{((p-q)\times q)}{\Sigma_{21}} & \underset{((p-q)\times(p-q))}{\Sigma_{21}} \end{array}\right]$$

maka $\mathbf{X}_i$ berdistribusi $N_p\left(\mu_1, \Sigma_{11}\right)$.

Dari akibat di atas kita punya bahwa semua subset dari vektor acak **X** yang berdistribusi normal adalah berdistribusi normal pula.

Contoh

Jika X berdistribusi $N_5\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma\right)$, cari distribusi dari $\begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$. Kita himpun sebelumnya $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix}$, dan $\Sigma_{11} = \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}$ dari $N_5\left(\boldsymbol{\mu}, \Sigma\right)$ kita punya $\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\mu}$, dan Σ yang kemudian akan kita susun kembali dan kita partisi menjadi

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \\ \hdashline X_1 \\ X_3 \\ X_5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \\ \hdashline \mu_1 \\ \mu_3 \\ \mu_5 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \left[\begin{array}{cc:ccc} \sigma_{22} & \sigma_{24} & \sigma_{12} & \sigma_{23} & \sigma_{25} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} & \sigma_{14} & \sigma_{34} & \sigma_{45} \\ \hdashline \sigma_{12} & \sigma_{14} & \sigma_{11} & \sigma_{13} & \sigma_{15} \\ \sigma_{23} & \sigma_{34} & \sigma_{13} & \sigma_{33} & \sigma_{35} \\ \sigma_{25} & \sigma_{45} & \sigma_{15} & \sigma_{35} & \sigma_{55} \end{array}\right]$$

atau

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \underset{(2\times 1)}{\mathbf{X}_1} \\ \hdashline \underset{(3\times 1)}{\mathbf{X}_2} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \underset{(2\times 1)}{\boldsymbol{\mu}_1} \\ \hdashline \underset{(3\times 1)}{\boldsymbol{\mu}_2} \end{bmatrix} \quad \Sigma = \left[\begin{array}{c:c} \underset{(2\times 2)}{\Sigma_{11}} & \underset{(2\times 3)}{\Sigma_{12}} \\ \hdashline \underset{(3\times 2)}{\Sigma_{21}} & \underset{(3\times 3)}{\Sigma_{22}} \end{array}\right]$$

dengan menggunakan <u>akibat 4</u> untuk $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_2 \\ X_4 \end{bmatrix}$,

kita akan memiliki distribusi dengan bentuk

$$N_2\left(\mu_2, \Sigma_{11}\right) = N_2\left(\begin{bmatrix} \mu_2 \\ \mu_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{24} \\ \sigma_{24} & \sigma_{44} \end{bmatrix}\right).$$

Dari contoh disini jelas bahwa untuk setiap bagian (subset) dari distribusi normal dapat diekspresikan dengan pemilihan yang tepat rata dan kovarian dari μ dan Σ awal.

Akibat 5.

(a) Jika $\underset{(q_1\times 1)}{\mathbf{X}_1}$ dan $\underset{(q_2\times 1)}{\mathbf{X}_2}$ independen, maka akan selalu benar bahwa

$Cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \mathbf{0}$, $q_1 \times q_2$ menghasilkan matrik nol.

(b) Jika $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ -- \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ berdistribusi $N_{q1+q2}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right]\right)$, maka $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$ independen jika dan hanya jika $\Sigma_{12} = \mathbf{0}$.

(c) Jika $\mathbf{X}_1$ dan $\mathbf{X}_2$ independen dan berdistribusi $N_{q1}(\boldsymbol{\mu}_1, \Sigma_{11})$ dan $N_{q2}(\boldsymbol{\mu}_2, \Sigma_{22})$, maka $\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ -- \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ merupakan multivariat normal.

$$N_{q1+q2}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \hline \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}' & \Sigma_{22} \end{array}\right]\right)$$

Contoh

Diberikan $\underset{(3\times 1)}{\mathbf{X}}$ berdistribusi $N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ dengan $\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Apakah X_1 dan X_2 independent? Bagaimana dengan (X_1, X_2) dan X_3?

Karena X_1 dan X_2 memiliki $\sigma_{12} = 1$, X_1 dan X_2 tidak independent. Tetapi

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}, \qquad \Sigma = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(2\times 2)}{\Sigma_{11}} & \underset{(2\times 1)}{\Sigma_{12}} \\ \hline \underset{(1\times 2)}{\Sigma_{21}} & \underset{(1\times 1)}{\Sigma_{22}} \end{array}\right]$$

Kita lihat bahwa $\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ dan X_3 memiliki matrik kovarian $\Sigma_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Hal ini menyebabkan (X_1, X_2) dan X_3 independent menurut akibat 5. Hal ini juga mengimplikasikan bahwa X_3 independent terhadap X_1 dan X_2.

Akibat 6. Misal $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ -- \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix}$ berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ dengan , $\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}$

$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right]$, dan $|\Sigma| > 0$. Maka distribusi bersyarat dari $\mathbf{X}_1$, memberikan $\mathbf{X}_2 = x_2$, berdistribusi normal dengan

Rata-rata = $\boldsymbol{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{12}^{-1}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_2)$, dan

Kovaian = $\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$

<u>Catat bahwa kovarian tidak tergantung ada nilai</u> $\mathbf{x}_2$ <u>dari variabel bersyarat</u>.

Proof. Akan dibuktikan dengan pembuktian tak langsung, ambil

$$\underset{(p\times p)}{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(q\times q)}{\mathbf{I}} & \underset{q\times(p-q)}{-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}} \\ \hline \underset{(p-q)\times p}{\mathbf{0}} & \underset{(p-q)\times(p-q)}{\mathbf{I}} \end{array}\right] \quad \text{sehingga}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{A}\left[\begin{array}{c} X_1 - \mu_1 \\ \hline X_2 - \mu_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2) \\ \hline X_2 - \mu_2 \end{array}\right] \text{ dan}$$

$$\mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \hline \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} & \mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \Sigma_{22} \end{array}\right]$$

Karena $X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)$ dan $X_2 - \mu_2$ memiliki kovarian nol, sehingga keduanya independent. Lebih lagi $X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)$ memiliki distribusi $N_q(\mathbf{0}, \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$. Diberikan $X_2 = x_2$, $\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)$ adalah suatu konstanta. Karena $X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2 - \mu_2)$ dan $X_2 - \mu_2$ independent, distribusi bersyarat dari $X_1 - \mu_1 - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)$ adalah sama dengan distribusi tak bersyarat dari $X_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2)$. Di awal kita sudah tahu bahwa $X_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\mu_2)$ berdistribusi $N_q\left(\mathbf{0},\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)$, sehingga vektor acak $X_1-\mu_1-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2)$ ada saat X_2 memiliki nilai khusus x_2. Hal ini equivalen juga untuk X_1, sehingga nantinya distribusinya akan berbentuk $N_q\left(\mu_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2-\mu_2),\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\right)$

Akibat 7. Jika $\mathbf{X}$ berdistribusi $N_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ dengan $|\Sigma|>0$. Maka:

(a) $(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})$ berdistribu χ_p^2 dimana χ_p^2 dinotasikan berdistribusi chi-kuadrat dengan derajad kebebasan *p*.

(b) Distribusi $N_p(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$ memberikan kemungkinan $1-\alpha$ untuk elipsoid padat $\{\mathbf{x}:(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\le\chi_p^2(\alpha)\}$, dimana $\chi_p^2(\alpha)$ menotasikan persentil ke(100α) dari distribusi χ_p^2.

Proof. Kita tahu bahwa χ_p^2 didefinisikan sebagai distribusi dari jumlah $Z_1^2+Z_2^2+\ldots+Z_p^2$, dimana $Z_1,Z_2,\ldots,Z_p$ independent $N(0,1)$ variabel random. Selanjutnya, melalui *spectral decomposotion* [lihat persamaan (2-16) dan (2-21) dengan $\mathbf{A}=\Sigma$, dan melihat ke akibat 4.1] $\Sigma^{-1}=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i{}'$,

dimana $\Sigma\mathbf{e}_i=\lambda_i\mathbf{e}_i$ sehingga $\Sigma^{-1}\mathbf{e}_i=(1/\lambda_i)\mathbf{e}_i$. Akibatnya,

$$(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\Sigma^{-1}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})=\sum_{i=1}^{p}(1/\lambda_i)(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})'\mathbf{e}_i\mathbf{e}_i{}'(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})=\sum_{i=1}^{p}(1/\lambda_i)\left(\mathbf{e}_i{}'(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right)^2$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\left[\left(1/\sqrt{\lambda_i}\right)\mathbf{e}_i{}'(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\right]^2=\sum_{i=1}^{p}Z_i^2,$$ ini untuk singkatnya.

Sekarang $\mathbf{Z} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$, dimana $\underset{(p\times 1)}{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_p \end{bmatrix}$, $\underset{(p\times p)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} e_2' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p' \end{bmatrix}$

dan $X - \mu$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \Sigma)$. Karenanya, dengan menggunakan akibat 3, $\mathbf{Z} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})$ berdistribusi $N_p(\mathbf{0}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}')$, dimana

$$\underset{(p\times p)}{\mathbf{A}}\underset{(p\times p)}{\Sigma}\underset{(p\times p)}{\mathbf{A}}' = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \mathbf{e}_1' \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} \mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} \mathbf{e}_p' \end{bmatrix} \left[\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i\right] \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1' \,\vdots\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} e_2' \,\vdots \cdots \vdots\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p' \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1' \\ \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_3}\mathbf{e}_3' \end{bmatrix} \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} e_1' \,\vdots\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} e_2' \,\vdots \cdots \vdots\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_p}} e_p' \right]$$

$$= 1$$

Oleh akibat 5 $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ variabel indeendent normal standar dan kita simpulkan bahwa $(X - \mu)'\Sigma^{-1}(X - \mu)$ memiliki distribusi χ_p^2.

Sampai sini kita bisa menyimpulkan dari akibat-akibat di atas 2 hal penting:

1. Menyangkut dengan kemungkinan isi sebuah elipsoid suatu konstanta kepadatan.
2. Berkenaan dengan bentuk lain dari kombinasi linier.

Distribusi chi-kuadrat dapat menentukan variabilitas dari varian sampel $s^2 = s_{11}$ untuk sampel yang berasal dari populasi normal univariat. Dasar ini juga akan memainkan hal penting ada distribusi multivariat.

Akibat 8. Diberikan $X_1, X_2, ..., X_n$ saling bebas dengan $\mathbf{X}_i$ berdistribusi $N_p\left(\boldsymbol{\mu}_j, \Sigma\right)$. (Perhatikan bahwa setiap $\mathbf{X}_j$ memiliki kovarian matrik Σ yang sama.) Maka $\mathbf{V}_1 = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 + ... + c_n\mathbf{X}_n$

Berdistribusi $N_p\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{\mu}_j, \left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)\Sigma\right)$. $\mathbf{V}_1$ dan $\mathbf{V}_2 = b_1\mathbf{X}_1 + b_2\mathbf{X}_2 + ... + b_n\mathbf{X}_n$ juga merupakan normal multivariat dengan kovarian matrik.

$$\begin{bmatrix} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)\Sigma & (\mathbf{b}'\mathbf{c})\Sigma \\ (\mathbf{b}'\mathbf{c})\Sigma & \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)\Sigma \end{bmatrix}$$

Konsekuensinya, $\mathbf{V}_1$ dan $\mathbf{V}_2$ independent jika $\mathbf{b}'\mathbf{c} = \sum_{j=1}^{n} c_j b_j = 0$.