BAB II
DASAR TEORI

Aljabar Matriks dan Vektor

<u>Definisi 1:</u>

Sebuah matiks A dengan n baris dan n kolom disebut matriks kuadrat berorde n (matriks persegi), dengan entri-entri $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ berada pada diagonal utama.

Jika $A = \{a_{ij}\}$, dimana a_{ij} entri-entri dari A, maka:

1. A^t menyatakan *transpose* dari A dengan sifat:
   - $(A^t)^t = A$
   - $(A+B)^t = A^t + B^t$
   - $(kA)^t = kA^t$, dimana k sembarang skalar.
2. A^{-1} menyatakan *Invers* dari A dengan sifat:
   - $(A^{-1})^{-1} = A$
   - $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, dimana I adalah matriks identitas.
3. $|A|$ menyatakan determinan dengan sifat:
   - $|A| = |A^t|$
   - $|AB| = |A||B|$, dimana A dan B matriks kuadrat berukuran sama.
   - $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$, dimana $|A| \neq 0$

<u>Definisi 2:</u>

Suatu matriks A yang determinannya tidak sama dengan nol disebut matriks *non-singular*, sehingga persamaan $AX = 0$ hanya mempunyai solusi trivial yaitu $X = 0$. Jika $|A| = 0$ (A *singular*), maka paling sedikit ada solusi non-trivial $(X \neq 0)$. Jika A *non-singular* maka $AX = 0$ hanya mempunyai solusi trivial.

Definisi 3:

Matriks kuadrat A disebut simetri jika $A = A^t$ atau $a_{ij} = a_{ji}$ untuk semua i dan j.

Definisi 4:

Matriks kuadrat A disebut *orthogonal* bila baris-barisnya (dipandang sebagai vektor) saling tegak lurus dan mempunyai panjang 1.

Definisi 5:

Diketahui A matriks berdimensi nxn, λ nilai *eigen* dari A. Vektor taknol x dinamakan *vektor eigen* dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x; yakni $Ax = \lambda x$.

Jika x dinormalisasi sehingga mempunyai panjang satu maka $x^t x = 1$. Vektor eigen yang dinormalisasi dinotasikan dengan e.

Definisi 6:

Matriks simetri $\underset{(kxk)}{A}$ disebut *definit non-negatif* jika $x^t Ax \geq 0$ untuk setiap $x^t = [x_1, x_2, \cdots, x_k]$. Jika persamaan dipenuhi hanya untuk vektor $x^t = [0, 0, \cdots, 0]$, maka A disebut *definit positif*. Dengan kata lain, A adalah *definit positif* jika $x^t Ax > 0$ untuk setiap vektor $x \neq 0$.

Definisi 7:

Trace dari matriks kuadrat A adalah jumlah elemen-elemen pada diagonal, ditulis dengan notasi

$$tr\,(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{pp} = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}$$

Dan mempunyai sifat:

- $tr\,(cA) = tr\,c(A)$
- $tr\,(A \pm B) = tr\,(A) \pm tr\,(B)$
- $tr\,(AB) = tr\,(BA)$
- $tr\,(B^{-1}AB) = tr\,(A)$
- $tr\,(AA^t) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}^2$

Definisi 8:

Himpunan vektor $x = [x_1, x_2, \cdots, x_k]$ dengan persamaan vektor $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_k x_k = 0$ mempunyai paling sedikit satu pemecahan, yakni $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\cdots$, $c_k = 0$.

Jika ini adalah satu-satunya pemecahan, maka himpunan vektor x disebut himpunan tak bebas linier. Tak bebas linier menyebabkan sekurang-kurangnya satu vektor dalam himpunan dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari vektor yang lain.