BAB 1
PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Seringkali para peneliti atau statistikawan melakukan penganalisaan terhadap suatu keadaan/masalah dimana keadaan yang dihadapi adalah besarnya jumlah variabel sampel yang diamati. Untuk itu perlu suatu teknik yang dapat mentransformasi variabel-variabel tersebut sehingga menjadi variabel-variabel baru yang jumlahnya jauh lebih sedikit namun masih dapat merepresentasikan variabel-variabel asli. Salah satu teknik yang dapat digunakan dalam hal tersebut adalah analisis faktor.

Dalam analisis faktor terdapat beberapa metode yang telah dikembangkan untuk menentukan atau mengelompokan variabel dan menaksir parameter dari analisis faktor. Metode-metode tersebut adalah metode komponen utama, metode maksimum likelihood, metode analisis image, metode analisis kanonik, metode analisis faktor alpha, metode minres, dan metode pemfaktoran sumbu utama.

Pada dasarnya model faktor dimotivasi oleh pernyataan ”terdapat sekelompok variabel yang disebut variabel asli, variabel itu dapat dikelompokan dengan kriteria variabel-variabel yang memiliki korelasi yang tinggi dan dikelompokan dalam suatu grup, sementara variabel-variabel dalam kelompok yang berbeda korelasinya kecil”.

Dari sekian banyak metode penaksiran parameter yang telah tersedia dalam makalah ini akan dibahas penaksiran parameter dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Metode maksimum likelihood harus memenuhi asumsi kenormalan. Metode ini digunakan karena dapat menghasilkan nilai taksiran parameter yang cukup baik.

1.2 TUJUAN

Untuk mengkaji metode yang digunakan dalam statistika multivariat khususnya dalam analisis faktor serta menguasai teknik analisis statistik yang dapat diimplementasikan dalam banyak terapan penelitian.

1.3 RUMUSAN MASALAH

1. Bagaiman bentuk model faktor Ortohogonal.
2. Bagaimana memilih banyaknya m faktor umum yang tepat dan sesuain dengan data kasus.
3. Bagaimana menaksir parameter-parameter dalam analisis faktor dengan menggunakan metode maksimum likelihood
4. Bagaimana menginterprestasikan hasil-hasil penaksiran
5. Bagaimana menggunakan

1.4 BATASAN MASALAH

1. Mengetahui bentuk model faktor orthogonal
2. Metode yang digunakan adalah metode maksimum likelihood
3. model faktor yang digunakan adalah model faktor ortogonal
4. rotasi vaktor yang digunakan adalah rotasi varimax

BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 VEKTOR DAN MATRIKS

2.1.1 VEKTOR

Definisi 1:

Susunan bilangan real x_1, x_2, …, x_n sebanyak n komponen disebut vector ditulis

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ atau $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$.

Definisi 2:

Vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ akan sama dengan vector $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ jika dan hanya jika $x_i = y_i$, untuk setiap i = 1, 2, ..., n.

Definisi 3:

Jumlah dua vektor x dan y yang berukuran sama adalah z = x + y, dengan $z_i = x_i + y_i$, untuk setiap i = 1, 2,..., n.

Definisi 4:

Panjang dari vektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ adalah $L_x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \|x\|$.

Definisi 5:

Sebuah vektor y dikatakan kombinasi linear dari vektor-vektor x_1, x_2, ...,x_k jika vektor tersebut dapat ditulis dalam bentuk $y=a_1x_1+a_2x_2+...+a_kx_k$, dimana $a_1,a_2,...,a_k$ adalah skalar.

2.1.2 MATRIKS

Definisi 1:

Matriks adalah susunan segi empat siku-siku dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan tersebut dinamakan entri. Sebuah matriks **A** dengan p baris dan n kolom yang dinotasikan

$$\underset{(pxp)}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{2} & \cdots & a_{n} \\ a_{21} & a_{2} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

; p x n dinamakan ukuran matriks, dan $a_{11}, a_{22} \ldots, a_{pn}$ entri-entri pada diagonal utama.

Jika n=1 maka matriks A disebut vektor(vektor kolom)

Jika p=n maka matriks A disebut matriks persegi.

Definisi 2:

Transpos matriks A adalah A^t dengan mengubah kolom menjadi baris sehingga kolom pertama pada A menjadi baris pertama pada A^t, kolom kedua menjadi baris kedua, dan seterusnya.

Dengan sifat:

$$(A^t)^t = A$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

$$(AB)^t = B^t A^t$$

Definisi 3:

Jika **A** dan **B** matriks dengan ukuran sama maka jumlah **A**+**B** adalah matriks yang diperoleh dengan menambahkan bersama-sama entri yang bersesuaian dalam kedua matriks tersebut.

Definisi 4:

Jika **A** matriks dan c skalar, maka hasil kali (product) c**A** adalah matriks yang diperoleh dengan mengalikan masing-msing entri dari A oleh c.

Definisi 5:

Jika **A** matriks m x r dan **B** matriks r x n, maka hasil kali **AB** adalah matriks m x n yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut:

- Untuk mencari entri dalam baris i dan kolom j dari **AB** , pilihlah baris i matriks **A** dan kolom j dari matriks **B**.
- Kalikanlah entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut bersama-sama dabn kemudian tambahkan hasil kali yang diperoleh.

Definisi 6:

Matriks kuadrat (matriks dengan n baris dan n kolom) dikatakan simetris jika $A = A^t$ atau a_{ij}=a_{ij} untuk setiap i dan j.

Teorema 2.1:

Misalkan **I** matriks kuadrat berukuran sama. **I** memiliki bilangan 1 pada diagonal utama dan bilangan 0 untuk entri-entri lainnya sehingga **IA**=**AI**=**A**, maka dalam hal ini **I** disebut matriks identitas.

Definisi 7:

Jika **A** matriks kuadrat, dan jika dapat dicari matriks **B** sehingga **AB** = **BA** = **I**, maka **A** dikatakan dapat dibalik(invertible) dan **B** dinamakan invers(inverse) dari **A** dinotasikan **B=** A^{-1} **.**

Definisi 8:

Misalkan **X** adalah suatu matriks persegi. Matriks **X** disebut ortogonal jika dan hanya jika

XXt = **XtX** = **I**

Dimana baris-barisnya (dipandang sebagai vector) saling tegak lurus dan mempunyai panjang 1 yaitu **XXt** = **I.** Matriks ortogonal yang mempunyai panjang 1 disebut matriks ortonormal.

Definisi 9:

Determinan matriks persegi $X_{k+k} = \{x_{ij}\}$ diberi notasi $|X|$ adalah suatu skalar.

$|X| = x_{11}$; jika k=1

$= \sum_{1}^{k} x_{1j} |X| (-1)^{1+j}$; jika k>1

Diman $\mathbf{X_{ij}}$ adalah matriks berukuran (k-1) x (k-1) yang diperoleh dari matriks **X** dengan menghilangkan baris ke-1 dan kolom ke-j.

Definisi 10:

Jika **A** adalah matriks n x n, maka vektor tak nol x didalam $\mathbf{R}^n$ dinamakan vektor eigen (*eigenvektor*) dari **A** jika **A x** adalah kelipatan skalar dari **x** ; yakni,

Ax = λ **x**

Untuk suatu skalar λ. Skalar λ dinamakan nilai eigen (*eigenvalue*) dari **A** dan **x** dikatakan vector eigen yang bersesuaian dengan λ. Sehingga **det(**λ **I - A) = 0.**

Definisi 11:

Misalkan **A** matriks simetri dan $x^t = [x_1, x_2, ..., x_n]$ disebut definit positif jika $x^t Ax > 0$ untuk setiap x $\neq$ 0.

Teorema 2.2:

Matriks simetrik **A** adalah definit positif jika dan hanya jika semua nilai eigen **A** adalah positif.

Definisi 12:

Misalkan **A** = $\{a_{ij}\}$ matriks kuadrat dengan ukuran k x k. Trace matriks **A**, ditulis **tr(A)**, adalah jumlah dari elemen diagonal utama, sehingga $tr(A) = \sum_1^k ii$.

Definisi 13:

Dekomposisi spektral dari matriks **X** berukuran k x k ditulis sebagai:

$X = \lambda_1 e_1 e^t{}_1 + \lambda_2 e_2 e^t{}_2 + ... + \lambda_k e_k e^t{}_k$

Dimana $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ adalah nilai eigen dari matriks **X** dan $\mathbf{e_1, e_2, ..., e_k}$ mer**u**pakan vektor eigen yang telah dibakukan, yaitu $\mathbf{e^t, e_i = 1}$, $\forall$ i = 1,2,…,k dan $\mathbf{e^t, e_j = 0}$ untuk i $\neq$ j.

Definisi 14:

Misalkan $\mathbf{A}_{kxk}$ adalah matriks definit positif dengan bentuk dekomposisi spektral **A** = $\sum_1^k \lambda_i e_i e^t{}_i$ dan **E** sebuah matriks ortonormal yang juga merupakan vektor dengan elemen-elemennya $\mathbf{e_1, e_2, ..., e_p}$, maka

$$A_{kxk} = \sum_1^k \lambda_i e_{i_{kx1}} e_{i_{1xk}}{}^t = E_{kxk} \Lambda_{kxk} E_{kxk}{}^t$$

Dimana $\mathbf{EE^t = E^tE = I}$ dan Λ adalah matriks diagonal yang beranggotakan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ dengan $\lambda_i \geq 0$. selanjutnya $\Lambda^{½}$ adalah matriks diagonal dengan $\sqrt{\lambda_i}$ sebagai elemen diagonal ke-i.

Sehingga diperoleh persamaan

$$A^{1/2} = \sum_{1}^{k} \sqrt{\lambda_i} e_i e_i^t = E\Lambda^{1/2} E^t$$

Dimana $\mathbf{A}^{½}$ merupakan matriks akar kuadrat dari matriks **A.**

2.2 VEKTOR RANDOM DAN MATRIKS RANDOM

Vektor random adalah vektor yang elemen-elemennya berupa variabel random, sedangkan matriks random adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan variabel random.

Definisi 1:

Misalkan X = $\{x_{ij}\}$ matriks orde (pxn) adalah matriks random, maka ekspetasi dari **X** ditulis **E[X]** matriks orde (pxn).

$$E[X] = \begin{bmatrix} E[X_{11}] & E[X_{12}] & \cdots & E[X_{1n}] \\ E[X_{21}] & E[X_{22}] & \cdots & E[X_{2n}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[X_{p1}] & E[X_{p2}] & \cdots & E[X_{pp}] \end{bmatrix}$$

2.3 VEKTOR RATA-RATA, MATRIKS VARIANSI KOVARIANS DAN MATRIKS KORELASI

Matriks random X=$\{x_j\}$ untuk setiap i = 1,2,…,p orde (px1) merupakan vector random, rata-rata dari vektor random X adalah $E[X] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \vdots \\ E[X_p] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_p \end{bmatrix} = \mu$

dan variansi kovariansi dari vector X adalah

$$\sum = E[X-\mu][X-\mu]^t$$

$$= E\left[\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 \\ X_2-\mu_2 \\ \vdots \\ X_p-\mu_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1-\mu_1 & X_2-\mu_2 & \cdots & X_p-\mu_p \end{bmatrix}\right]$$

$$= E\begin{bmatrix} (X_1-\mu_1)^2 & (X_1-\mu_1)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_1-\mu_1)(X_p-\mu_p) \\ (X_2-\mu_2)(X_1-\mu_1) & (X_2-\mu_2)^2 & \cdots & (X_2-\mu_2)(X_p-\mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X_p-\mu_p)(X_1-\mu_1) & (X_p-\mu_p)(X_2-\mu_2) & \cdots & (X_p-\mu_p)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Karena $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ untuk setiap i = 1,2,…,p dan k = 1,2,…,p maka i = k, sehingga

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1p} & \sigma_{2p} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$ jika $X_1, X_2, \ldots, X_p$ saling bebas maka kovariansi $\sigma_{ik} = 0$

sehingga

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$$

Ukuran keeratan antara variable random X_1 dengan X_k adalah koefisien korelasi populasi ρ_{ik} yang didefinisikan dengan $\rho_{ik} = \dfrac{\sigma_{ik}}{\sqrt{\sigma_{ii}}\sqrt{\sigma_{kk}}}$

Dimana:

σ_{ik} : kovariansi

σ_{ii}, σ_{kk} : variansi

<u>Teorema 2.3:</u>

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sample random dari suatu distribusi bersama dengan vektor rata-rata μ dan matriks variansi kovariansi Σ. Maka

1. $\bar{X}$ merupakan penaksir tak bias untuk μ, dan matriks variansi kovariansi dari $\bar{X}$ adalah $\frac{1}{n}\Sigma$, yaitu E[$\bar{X}$] = μ dan Cov($\bar{X}$) = $\frac{1}{n}\Sigma$
2. $S = \frac{1}{n-1}\sum_{1}^{n}(X_j - \bar{X})(X_j - \bar{X})^t$ adalah penaksir takbias dari matriks variansi kovarinsi yaitu E[S] = Σ.