REDAMAN VIBRASI ARUS INDUKSI OLEH EKSITASI PARAMETRIK

Siti Fatimah*

Jurusan Pendidikan Matematika, FPMIPA, Universitas Pendidikan Indonesia

Abstrak

Diberikan sebuah model yang terdiri dari benda yang memiliki dua buah massa, m_1 dan m_2. Massa m_2 ditopang oleh sebuah pegas linear dengan konstanta k_2 dan sebuah damper linear dengan konstanta kelenturannya c_1, sehingga massa m dapat bergerak ke atas dan ke bawah yang dinyatakan oleh variabel x . Massa m dikenai arus induksi dengan koefisien kecepatannya dinyatakan dengan U. Arus induksi tersebut menyebabkan massa m bervibrasi. Pada massa m dipasangkan sebuah pegas linear lain dengan konstanta k_2 dan sebuah damper taklinear dengan koefisien periodik $k(t)$, sedemikian sehingga gaya yang ditimbulkannya berlawanan dengan gaya yang ditimbulkan oleh arus induksi U. Jika $U = 0$, artinya arus induksi tidak bekerja pada massa m, maka akan diperoleh persamaan yang memuat persamaan Mathieu. Persamaan ini memuat suku yang menyatakan eksitasi parametrik. Jika $k(t) = 0$, artinya tidak ada pengaruh eksitasi parametrik, maka akan diperoleh persamaan van der Pol. Jika kedua gaya bekerja maka persamaan tersebut merupakan kombinasi antara persamaan Mathieu dan persamaan van der Pol. Untuk selanjutnya persamaan tersebut disebut persamaan van der Pol yang tereksitasi secara parametrik. Secara matematis penelitian ini akan mengkaji interkasi antara persamaan Mathieu dan persamaan van der Pol untuk nilai-nilai parameter yang cukup kecil. Kajian tersebut akan difokuskan kepada mempelajari kestabilan dan interkasi antara solusi-solusi khusus dari persamaan van der Pol dengan solusi dari persamaan Mathieu. Adapun untuk kepentingan aplikatif, penelitian akan ditujukan; pertama untuk menginvestigasi interval

*sitifatimah@upi.edu, Bidang keahlian Analisis dan Matematika Terapan (Sistem Dinamik)

atau daerah dimana vibrasi pada model dapat diredam secara efektif; kedua menginterpretasikan hasil-hasil analisa matematik terhadap model aslinya. Penelitian ini akan meninjau aspek analitik dan juga numerik. Aspek analitik meliputi pemodelan ke dalam model matematik, penurunan dan perhitungan bentuk Normal beserta validasinya, menghitung secara eksplisit kondisi dimana solusi berada. Juga akan dibahas relevansi dari solusi-solusi khusus yang didapat, dengan solusi dari sistem semula. Untuk keperluan tersebut untuk analisa matematis akan digunakan metode Averaging dan metode Poincare-Linstead. Untuk pemograman akan digunakan metode Runge-Kutta.

1. Pendahuluan

Pada model-model yang ditemukan dalam kehidupan sehari-hari, vibrasi (getaran) yang disebabkan oleh arus induksi dapat menimbulkan kerugian. Contohnya, arus induksi yang ditimbulkan oleh angin yang menerpa konstruksi-konstruksi seperti kereta gantung, jembatan raksasa, atau bangunan-bangunan pencakar langit. Contoh lainnya adalah arus induksi yang ditimbulkan oleh gelombang laut, sehingga menimbulkan goncangan pada sebuah kapal. Arus semacam itu mengakibatkan vibrasi atau bahkan ayunan keras pada konstruksi. Apabila frekuensi kejadiannya intensif, hal tersebut akan mengakibatkan kerusakan pada konstruksi yang tidak hanya merugikan tetapi juga membahayakan.

Model-model pada contoh di atas secara matematik dapat dinyatakan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa (pdb) yang memuat beberapa parameter. Model-model seperti itu tidak hanya muncul di bidang Fisika dan Mekanika, tetapi juga dikenal di bidang Meteorologi, Geofisika dan ilmu rekayasa lainnya. Model-model tersebut digarap oleh para ahli dengan meninjau hal-hal yang spesifik sesuai dengan ketertarikan masing-masing. Di bidang Teknik Mesin dan Mekanika, mereka tertarik dengan fenomena quenching (meredam vibrasi yang ditimbulkan oleh arus induksi). Di bidang Meteorologi dan Geofisika, solusi periodik atau quasi-periodik dipelajari karena berkorespondensi dengan regularity dari iklim. Sementara itu di bidang Matematika, dalam Sistem Dinamik, analisis perilaku solusi dilakukan untuk mempelajari bifurkasi dan kestabilan solusi.

Meredam atau mengurangi vibrasi yang ditimbulkan oleh arus induksi banyak diupayakan oleh para ahli. Penelitian telah banyak dilakukan untuk mencari cara yang paling efektif dan efisien.

Pada tulisan ini akan dibahas suatu model dari bidang Mekanika, yaitu model sistem dua-massa. Pembahasan akan difokuskan kepada peranan ilmu Matematika dalam menjelaskan suatu keadaan yang muncul dalam eksperimen yang telah dilakukan oleh Mekanis dalam meredam vibrasi arus induksi pada model sistem dua-massa.

1.1. **Latar Belakang Masalah.** Pada bidang Mekanika, untuk mengurangi pengaruh dari arus induksi pada suatu model sistem massa-pegas telah banyak digunakan absorber, yaitu peredam yang menggunakan kombinasi pegas dan massa. Cara lainnya adalah dengan mengkombinasikan dua buah peredam yang berbeda. Hasil penelitian Tondl [Tondl1 dan Tondl2], menunjukkan bahwa cara ini dapat mengurangi vibrasi dengan efektif. Namun, kedua cara di atas memiliki kelemahan yaitu kebergantungannya kepada massa peredam, semakin besar vibrasi yang timbul maka semakin besar pula massa peredam yang diperlukan. Pada tulisan Tondl mengenai sistem dua-massa, yaitu sistem yang memuat dua buah massa yang dikenai arus induksi (lihat [Tondl3]), diperlihatkan bahwa apabila sistem tersebut diberi gaya luar sedemikian hingga sistem berperiodik, maka vibrasi akibat arus induksi dapat dikurangi. Keuntungan dari cara ini adalah tidak diperlukan peredam dengan massa yang besar untuk mengurangi vibrasi.

Tulisan ini akan mengkaji solusi dari masalah terbuka (open problem) yang diformulasikan oleh Ecker dan Tondl. Pada penelitiannya dibahas sebuah model yang terdiri dari dua buah massa, massa utama dan massa peredam. Massa utama dikenai arus induksi, berupa self-excited force dengan jenis Rayleigh sehingga massa utama bervibrasi. Massa ini ditopang oleh sebuah pegas linear dan sebuah damper, yang kemudian dihubungan kepada massa peredam oleh sebuah alat pegas-damper (lihat gambar 1). Perubahan kelenturan alat tersebut menyatakan gerakan periodik.

Berdasarkan pada model yang dipelajari oleh Tondl, model tersebut di atas akan merupakan persamaan diferensial orde dua yang bergantung kepada parameter-parameter yang berhubungan dengan kecepatan arus induksi dan gaya akibat eksitasi parametrik. Jika model tidak dikenai arus-induksi maka akan diperoleh persamaan Mathieu, yaitu persamaan diferensial orde dua yang memuat non-linearitas berupa gaya parametrik. Sebaliknya, jika model tidak dikenai eksitasi parametrik maka akan diperoleh persamaan van der Pol. Jadi persamaan yang diperoleh dari model yang dibicarakan memuat kombinasi dari persamaan Mathieu dan persamaan van der Pol.

Persamaan Mathieu dan persamaan van der Pol merupakan model klasik yang penggunaannya cukup banyak dimuat dalam literatur-literatur bidang rekayasa, khususnya untuk persamaan tanpa suku yang non-linear. Dari sudut pandang bidang Matematika, masih terdapat pertanyaan-pertanyaan yang perlu dibahas pada persamaan-persamaan tersebut terutama jika persamaannya memuat suku non-linear. Pertanyaan tersebut berkenaan dengan dinamik dari solusinya, yaitu pada nilai parameter berapakah solusi trivial, non-trivial dan solusi periodik tak stabil. Kemudian apakah ketakstabilan tersebut diikuti oleh terciptanya solusi-solusi yang stabil atau tidak. Kombinasi antara persamaan Mathieu dan persamaan van der Pol secara matematis belum banyak ditinjau. Hasil penelitian ini akan melengkapi pengetahuan yang ada tentang sistem tersebut, sekaligus juga akan memberikan gambaran yang lebih menyeluruh kepada para pengguna model, tentang dinamik yang mungkin terjadi pada model seperti itu.

Terdapat dua kepentingan pada penelitian ini yang akan ditinjau, yaitu kepentingan matematis dan aplikatif. Secara matematis penelitian ini akan mengkaji interkasi antara persamaan Mathieu dan persamaan van der Pol untuk nilai-nilai parameter yang cukup kecil dengan menggunakan teori preturbasi. Kajian tersebut akan difokuskan kepada interkasi antara solusi periodik dari persamaan van der Pol dengan solusi periodik dari persamaan Mathieu dan kestabilannya. Adapun untuk kepentingan aplikatif, penelitian akan ditujukan; pertama untuk menginvestigasi interval atau daerah dimana vibrasi pada model dapat diredam secara efektif; kedua menginterpretasikan hasil-hasil analisa matematik terhadap model aslinya. Penelitian ini akan meninjau aspek analitik dan juga numerik.

Aspek analitik meliputi pemodelan ke dalam model matematik, penurunan dan perhitungan bentuk Normal beserta validasinya, menghitung secara eksplisit kondisi dimana solusi berada. Juga akan dibahas relevansi dari solusi-solusi khusus yang didapat dengan solusi dari sistem semula. Untuk keperluan itu akan digunakan teori perturbasi, metode Averaging dan metode Poincare-Linstead. Aspek numerik dari penelitian meliputi simulasi dengan menggunakan Soft-ware program CONTENT untuk mengetahui bifurkasi solusi; program aplikasi MAPLE digunakan untuk menghitung kurva bifurkasi; dan program aplikasi DS-Tool untuk memberikan potret fase dari persamaan. Penulisan program integrasi dengan metode Runge-Kutta dalam bahasa pemograman PASCAL ditujukan untuk mencari solusi periodik dari persamaan tersebut. Penelitian ini memiliki potensi untuk menjadi penelitian payung dengan sub-penelitiannya yaitu dinamik pada persamaan Mathieu, dinamik pada persamaan van der Pol yang tereksitasi secara parametrik, dan solusi periodik dari persamaan van der Pol yang tereksitasi secara parametrik dengan menggunakan metode Runge-Kutta. Sub-penelitian tersebut dapat dikerjakan oleh tiga orang mahasiswa sebagai tugas akhirnya. Kajian akan terbatas pada mempelajari perilaku solusi-solusi khusus, menganalisis keberadaan dari solusi periodik, juga interpretasinya pada model nyata dan membuat program integrasi numerik untuk mendapatkan solusi periodik.

2. Model

Model dari sistem yang akan dibahas dapat dilihat pada Gambar 1, di mana koordinat posisi dari massa m_1 dan m_2 masing-masing dinotasikan oleh x_1 dan x_2

Sistem tersebut di atas dimodelkan oleh sistem persamaan nonlinear dalam format bebas dimensi berikut ini.

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' + c_1(y_1' - y_2') + k_1(1 + \varepsilon \cos \eta\tau)(y_1 - y_2) &= 0, \\ m_2 y_2'' - c_1(y_1' - y_2') - k_1(1 + \varepsilon \cos \eta\tau)(y_1 - y_2) + c_2 y_2' + & \\ k_2 y_2 - b_\circ U^2(1 - \gamma_\circ {y_2'}^2) y_2' &= 0. \end{aligned}$$

(2.1)

di mana $|\varepsilon| < 1$, $\kappa_1 = \frac{c_1}{m_1\omega_\circ}$, $\kappa_2 = \frac{c_2}{m_2\omega_\circ}$, $\beta = \frac{b_\circ {U_\circ}^2}{m_2\omega_\circ}V^2 = \frac{U^2}{{U_\circ}^2}$, $\gamma = \gamma_\circ {\omega_\circ}^2$, $M = \frac{m_1}{m_2}$. Parameter $U_\circ$ adalah nilai yang dipilih untuk kecepatan aliran medium. Ketika $U_\circ$ mencapai nilai kecepatan kritis $U_c = \sqrt{c_2/b_\circ}$ kecepatan kritis relatif adalah $V_c = 1$.

3. Sistem Teraverage.

Dengan menggunakan metode averaging, kita analisa sistem (**??**) sebagai berikut. Melakukan rescale parameter $\kappa_{1,2} = \varepsilon\bar{\kappa}_{1,2}$, and $\beta = \varepsilon\bar{\beta}$, bagian linear dari (**??**) tergantung pada M dan Q. Menggunakan transformasi seperti pada [**?**] diperoleh bentuk quasi-normal berikut.

$$\begin{aligned} \bar{x}_1'' + \Omega_1^2\bar{x}_1 &= -\tfrac{\varepsilon}{a_1-a_2}F_1(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', \eta\tau, \mu), \\ \bar{x}_2'' + \Omega_2^2\bar{x}_2 &= -\tfrac{\varepsilon}{a_1-a_2}F_2(\bar{x}_1, \bar{x}_1', \bar{x}_2, \bar{x}_2', \eta\tau, \mu). \end{aligned}$$

(3.1)

di mana $\mu = (\bar{\kappa}_{1,2}, \bar{\beta}, M, Q, \gamma)$. Frekuensi natural sistem terlinearisasi tanpa damping (untuk $\varepsilon = 0$) Ω_1 dan Ω_2, dalam bentuk

$$\Omega_{1,2}^2 = 1/2\left(1 + Q^2(1+M)\right) \mp \sqrt{1/4(1+Q^2(1+M))^2 - Q^2} \tag{3.2}$$

dan $a_{1,2}$ memenuhi

$$a_{1,2} = \frac{1}{Q^2}\left(\frac{1}{2}(-MQ^2 - 1 + Q^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(MQ^2 + 1 + Q^2)^2 - Q^2}\right). \tag{3.3}$$

Fungsi-fungsi F_1 dan F_2 tergantung pada frekuensi dari eksitasi parametrik η, dan kondisi berikut terpenuhi. $a_1 a_2 = -M$, $0 < a_1 < 1$, dan $a_2 < -M$.

Kita membahas kasus kombinasi resonansi $\Omega_2 - \Omega_1 = \eta_\circ$, $(\Omega_2 > \Omega_1)$. Mentransformasi $t \rightarrow \eta_\circ\tau$ dan menganalisa untuk nilai di sekitar resonansi tersebut, yaitu $\eta = \Omega_2 - \Omega_1 + \varepsilon\sigma$, di mana $\omega_{1,2} = \frac{\Omega_{1,2}}{\eta_\circ}$ dan $\omega_2^2 - \omega_1^2 = 1$.

Dalam implementasi metode averaging kita gunakan transformasi van der Pol dan diperoleh sistem empat dimensi sebagai berikut.

$$X' = AX + F(X) \tag{3.4}$$

di mana A adalah matriks Jacobian ordo $4X4$ yang merupakan bagian linear dari sistem.

4. Kondisi Untuk Menghapuskan Getaran: Kasus Linear

Bagian linear dari sistem teraverage di atas tergantung pada parameter-parameter θ_{11}, θ_{22}, Q_{12}, Q_{21} yang merupakan fungsi dari μ. Beberapa relasi penting yang perlu diperhatikan antara lain: $Q_{12} < 0$ dan $Q_{21} < 0$. Damping-damping linier θ_{11} dan θ_{22} selalu bernilai positif apabila $\bar{\beta}V^2 - \bar{k_2} < 0$. Apabila $\bar{\beta}V^2 - \bar{k_2} > 0$, ada tiga kondisi untuk pasangan nilai-nilai θ_{11} dan θ_{22}, yaitu: $\theta_{11} < 0$ dan $\theta_{22} > |\theta_{11}|$, atau $\theta_{22} < 0$ dan $\theta_{11} > |\theta_{22}|$, atau $\theta_{22} > 0$ dan $\theta_{11} > 0$.

Tanda-tanda dari damping-damping linier θ_{11} dan θ_{22} berperan untuk menentukan kondisi-kondisi ketika getaran dapat dihapuskan. Selain itu dari nilai damping-damping linier tersebut dapat kita peroleh selang nilai dari rasio kedua massa, M, sebagai berikut.

$$M^\star = \frac{(\bar{\beta}V^2 - \bar{\kappa_2}) - \bar{\kappa_1}}{\bar{\kappa_1}} < M < \frac{\bar{\beta}V^2 - \bar{\kappa_2}}{\bar{\kappa_1}} \tag{4.1}$$

Dengan menerapkan kriteria Routh-Hurwitz untuk mendapatkan bagian-bagian riil dari nilai-nilai eigen dari matriks A pada persamaan (**??**) bertanda negatif semua, diperoleh dua kondisi. Kondisi pertama adalah: Dan kondisi kedua berupa relasi berikut.

$$p_1\sigma^4 + p_2\sigma^2 + p_3 > 0 \tag{4.2}$$

di mana p_j, $j = 1, 2, 3$ tergantung pada Q, M, dan nilai parameter-parameter lain ditetapkan. Menyelesaikannya pada daerah batasnya, kita peroleh

$$\sigma_i = \pm\frac{1}{4}\frac{\theta_{11} + \theta_{22}}{(a1 - a2)}\sqrt{-\frac{4\Omega_1\Omega_2\theta_{11}\theta_{22} + Q12Q21}{\Omega_1\Omega_2\theta_{11}\theta_{22}}}, \qquad i = 1, 2. \tag{4.3}$$

di mana dua akar yang lain selalu bernilai imajiner. Untuk memperoleh nilai-nilai riil dari σ_i, kondisi $4\Omega_1\Omega_2\theta_{11}\theta_{22} + Q12Q21 > 0$ dan θ_{11} atau θ_{22} tidak negatif dua-duanya. Untuk kasus keduanya bernilai positif, kondisi kedua **??** selalu dipenuhi.

Kondisi-kondisi (**??**) dan (**??**) adalah kondisi-kondisi untuk menentukan apakah penghapusan getaran tereksitasi sendiri secara penuh dapat tercapai. Karena kombinasi resonansi hanya terjadi di persekitaran frekuensi eksitasi parametrik $\eta_\circ$, maka selang getaran tereksitasi sendiri tereduksi dapat terjadi di dalam persekitaran tersebut, lihat [**?**]. Dan selang kestabilannya adalah

$$\eta_\circ + \epsilon\sigma_2 < \eta < \eta_\circ + \epsilon\sigma_1 \tag{4.4}$$

5. Kestabilan Solusi Trivial

Eksitasi parametrik hanya bisa berlaku ketika getaran tereksitasi sendiri terjadi. Terjadinya getaran tereksitasi sendiri tergantung pada kondisi-kondisi dari parameter-parameter damping θ_{11} atau θ_{22}. Ketika keduanya bernilai positif maka peredam dinamis berhasil menghapuskan getaran tereksitasi sendiri.

Pada Gambar **??** ditunjukkan daerah batas ketidak-stabilan solusi trivial pada bidang (σ, Q) dan (η, Q) untuk suatu nilai tertentu M. Gambar tersebut memperlihatkan kesamaan karakteristik dari daerah di mana terjadi penghapusan getaran secara penuh. Di dalam kurva tersebut kita temukan solusi stabil dan solusi tidak stabil berada di luar kurva.

6. Kesimpulan

Kita telah menganalisa sistem (**??**) dengan menggunakan metode averaging. Hasil-hasil yang telah kita peroleh menunjukkan bahwa diperlukan dua kondisi ((**??**) dan (**??**)) agar terjadi penghapusan getaran tereksitasi sendiri. Kondisi pertama menyatakan bahwa salah satu dari damping linier (θ_{11} atau θ_{22}) bernilai negatif dan jumlah keduanya bernilai positif. Sedangkan dari kondisi kedua diperoleh relasi antara frekuensi eksitasi parametrik η atau σ dengan rasio frekuensi Q. Relasi ini menentukan apakah penghapusan getaran secara penuh dapat tercapai atau tidak dalam selang tertentu. Hasil dari analisis kita juga menunjukkan bahwa peredam dinamis dengan eksitasi parametrik dapat memperluas daerah di mana penghapusan getaran secara penuh untuk nilai-nilai di sekitar frekuensi kombinasi resonansi tercapai.

Kedua penulis sedang menempuh studi S3 di Mathematisch Instituut, University of Utrecht, PO. Box 80.010, 3508 TA Utrecht, The Netherlands.

References

[1] Ecker, H. and Tondl, A (2000)"Supression of flow-induced vibrations a dynamic absorber with parametric excitation", *Proceedings of* 7^{th} *International Conference on Flow-Induced Vibrations*, 1-7.

[2] Sanders, J.A. and Verhulst, F (1985), *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical System*, Appl.math. Sciences 59, Springer-Verlag, New York.

[3] Tondl, A (1978) On the Interaction between Self-excited and Parametric Vibrations, Monographs and Memoranda No. 20, National Research Institute for Machine Design, Prague.

[4] Tondl, A (1997) To the interaction of different types of excitations, Monographs and memoranda No. 25, National Research Institute for Machine Design, Prague.

[5] Tondl, A (1998)"To the problem of quenching self-excited vibrations", *Acta Technica CSAV*, 43, 109-116.

[6] Tondl, A, Ruijgrok, M, Verhulst, F, and Nabergoj, R (2000), *Autoparametric Resonance in Mechanical Systems*, Cambridge University Press, New York.