

Aljabar Linier dan Struktur Aljabar 2010

The title is centered at the top. It is surrounded by five light purple circles: one empty circle above the first word, one solid circle above the second word, one solid circle above the third word, one solid circle below the first word, and one empty circle below the third word.

Dr. Rizky Rosjanuardi, M.Si.

Petunjuk Umum Soal



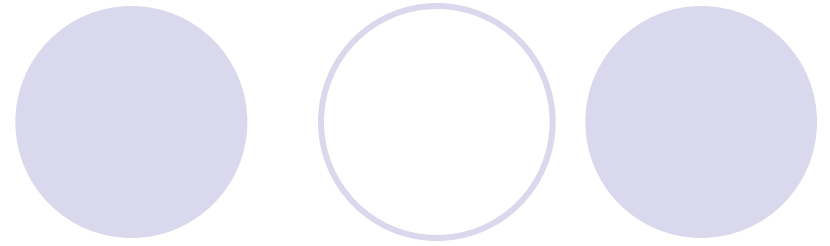
1. Tes ini terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 8 soal, sedangkan Bagian Kedua terdiri dari 3 soal.
2. Untuk soal-soal Bagian Pertama, tuliskan hanya jawaban akhir saja pada kotak yang disediakan.
3. Untuk soal-soal Bagian Kedua, tuliskan jawaban Anda lengkap dengan argumentasi dan penjelasan.
4. Setiap soal pada Bagian Pertama bernilai 2 angka, sedangkan setiap soal pada Bagian Kedua bernilai 8 angka.
5. Waktu tes adalah waktu total untuk kedua bagian. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal yang mana pun sesuka Anda.

Lingkup



- Aljabar Linier: Matriks, SPL, ruang vektor, sub ruang, basis dan dimensi, HKD, nilai eigen, diagonalisasi, transformasi linier.
- Struktur Aljabar: grup, subgrup, koset, subgrup normal, grup kuosien, homomorfisma grup, ring, daerah integral, lapangan, ideal, ring kuosien, daerah faktorisasi tunggal, polinom.

Aljabar Linier



1. Tentukan suku banyak karakteristik dari

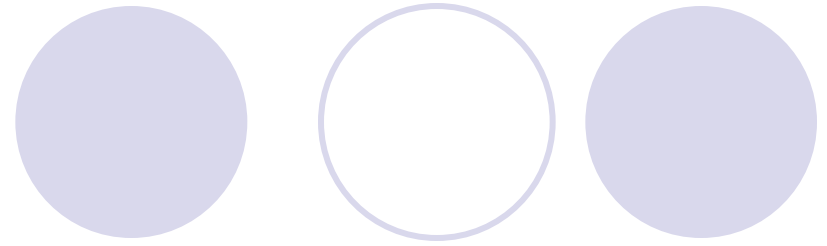
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Aljabar Linier



2. Tentukan koordinat dari x^2 terhadap basis $\{x^2+x, x+1, x^2+1\}$ di P_2 .
3. Perhatikan himpunan vektor bebas linier $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}\}$ di \square^n . Tentukan nilai skalar c agar himpunan $\{\mathbf{u}+c\mathbf{v}, \mathbf{v}+c\mathbf{w}, \mathbf{w}+c\mathbf{x}, \mathbf{x}+c\mathbf{u}\}$ bebas linier.

Aljabar Linier



4. Tentukan selang untuk nilai a agar

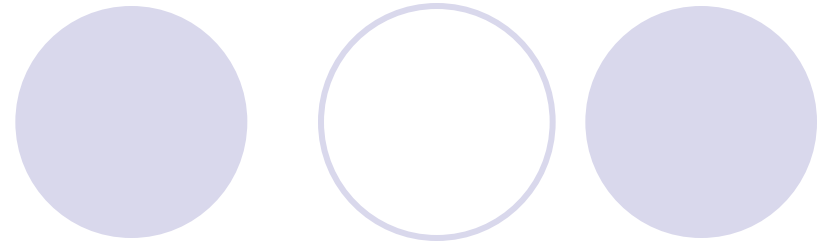
matriks

$$\begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

memiliki tiga buah nilai karakteristik real

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$$

Aljabar Linier



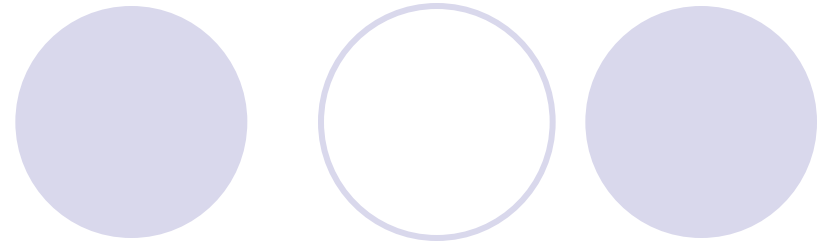
5. Misalkan x_1, x_2 dan x_3 bilangan-bilangan real $x_1 < x_2 < x_3$. Pemetaan $T : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ didefinisikan dengan aturan

$$T(p(x)) = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_3) \end{bmatrix},$$

untuk setiap $p(x) \in P_2$.

- Tunjukkan bahwa T merupakan pemetaan linier.
- Periksa apakah T bijektif.

Aljabar Linier



6. Misalkan

$$X = \{(1, a, a), (a, 1, a), (a, a, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Tentukan semua nilai a agar X bergantung linier



Struktur Aljabar

7. Tuliskan permutasi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 3 & 7 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

sebagai perkalian dari permutasi siklik yang disjoint.



Struktur Aljabar

8. Diketahui grup Dihedral

$$D_4 = \{e, y, y^2, y^3, x, xy, xy^2, xy^3\}$$

di mana

$$x^2 = y^4 = e, \quad xy = y^{-1}x$$

Tentukan sebuah subgrup tak siklik dari D_4



Struktur Aljabar

9. Tuliskan polinom $x^4 + 4 \in \mathbb{F}_5[x]$
atas polinom-polinom taktereduksi.

10. Berikan contoh ideal maksimal dari \mathbb{F}_{18}



Struktur Aljabar

Misalkan $f : \langle g \rangle \rightarrow \langle h \rangle$ sebuah homomorfisma grup dari grup siklis $\langle g \rangle$ dan $\langle h \rangle$, di mana $|\langle g \rangle| = 8$ dan $|\langle h \rangle| = 4$.
Tentukanlah $\ker(f)$.



Struktur Aljabar

Misalkan R suatu ring dengan karakteristik n (hingga). Untuk setiap $a \in R$ notasi

$$G(a) = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$$

menyatakan subgrup siklik dari R terhadap operasi tambah yang dibangun oleh a .

- Buktikan bahwa jika R *integral domain* maka untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ berlaku subgrup $G(a)$ dan $G(b)$ isomorfik.
- Apakah jika pada pernyataan a. di atas, syarat *integral domain* kita hilangkan, pernyataan “untuk setiap $a, b \in R$ dengan $a \neq 0$ dan $b \neq 0$ berlaku subgrup $G(a)$ dan $G(b)$ isomorfik” masih berlaku? Jelaskan.



Struktur Aljabar

Dari R ring dan himpunan tak kosong $J \subset R$ dibentuk himpunan

$$N(J) = \{r \in R \mid rx = 0, \quad \forall x \in J\}.$$

- Tunjukkan $N(J)$ tidak kosong
- Apakah $N(J)$ merupakan ideal? Jelaskan!
- Jika $J \subset J' \subset R$, apa yang dapat saudara simpulkan tentang hubungan $N(J)$ dan $N(J')$. Jelaskan!