Analisis Fungsional

Oleh:
Dr. Rizky Rosjanuardi, M.Si
Jurusan Pendidikan Matematika
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

Lingkup Materi

- Ruang Metrik dan Ruang Topologi
- Kelengkapan
- Ruang Banach
- Ruang Hilbert
- Basis ortonormal dari ruang Hilbert
- Teorema proyeksi dan lema Riesz
- Jumlah langsung
- Produk tensor

Ruang Vektor Kompleks

Ruang vektor atas □ adalah grup *Abelian aditif X*, sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in$ □ dan *e* suatu unsur identitas di □ berlaku:

1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$

2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$

3) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$

4) $e.x = x.$

Contoh ruang vekto

1) Himpunan $M_{mn}(\mathbb{C})$ yang merupakan himpunan matriks berukuran $m \times n$ dengan entri-entri bilangan kompleks adalah suatu ruang vektor.

2) $\mathbb{C}^3 := \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{C}\}$ dengan penjumlahan titik demi titik $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ dan dilengkapi perkalian skalar bilangan kompleks $\alpha(x_1, y_1, z_1) := (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)$ adalah suatu ruang vektor.

Ruang vektor bernorm

Misalkan X suatu ruang vektor atas □ . Norm di X adalah sebuah pemetaan $\|\cdot\| : X \to$ □ , sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in X$, $\alpha \in$ □ berlaku:

1) $\|x\| \geq 0,$

2) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0,$

3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$

4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Selanjutnya, ruang vektor X yang dilengkapi dengan norm $\|.\|$ atau ditulis $X, \|\cdot\|$ disebut ruang vektor bernorm.

Hasil Kali Dalam - Ruang HKD

Misalkan X suatu ruang vektor atas □ . Suatu hasil-kali dalam pada ruang vektor X adalah pemetaan $\langle . | . \rangle : X \times X \to$ □ , sedemikian sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ dan sembarang skalar $\alpha, \beta \in$ □ berlaku:

1) $\langle \alpha x + \beta y \mid z \rangle = \alpha \langle x \mid z \rangle + \beta \langle y \mid z \rangle$,

2) $\langle x \mid y \rangle = \langle \overline{y \mid x} \rangle$,

3) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ dan $\langle x \mid x \rangle = 0$ jika dan hanya jika x=0.

Selanjutnya, ruang vektor X yang dilengkapi dengan hasil-kali dalam $\langle . | . \rangle$ atau ditulis $X, \langle . | . \rangle$ disebut ruang hasil-kali dalam.

Contoh Ruang HKD

Perhatikan ruang fungsi kompleks kontinu:

$$C[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{C} \mid f \text{ kontinu}\}.$$

Misalkan $f, g \in C[a,b]$. Tulis $f = f_1 + if_2$ dan $g = g_1 + ig_2$ dengan $f_i, g_i;\ i = 1,2$ adalah fungsi-fungsi real kontinu dengan domain $[a,b]$.

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar berturut-turut:

$$(f+g)(x) := (f_1(x) + g_1(x)) + i(f_2(x) + g_2(x))$$

dan

$$(\alpha f)(x) := \alpha f_1(x) + i\alpha f_2(x),$$

Contoh Ruang HKD

untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$. Dapat ditunjukkan $C[a,b]$ adalah ruang vektor atas $\mathbb{C}$. Selanjutnya didefinisikan:

$$\langle f \,|\, g \rangle := \int_a^b \left[f_1(x) + i f_2(x) \right] \overline{\left[g_1(x) + i g_2(x) \right]} \, dx.$$

$(C[a,b], \langle . | . \rangle)$ adalah ruang hasil-kali dalam.

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar berturut-turut:

$$(f+g)(x) := \left(f_1(x) + g_1(x) \right) + i \left(f_2(x) + g_2(x) \right)$$

dan

$$(\alpha f)(x) := \alpha f_1(x) + i \alpha f_2(x),$$

Ruang Banach, Ruang Hilbert

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang vektor bernorm, ruang *X* disebut *lengkap* jika setiap barisan *Cauchy* (x_n) di *X* konvergen di *X*. Suatu ruang vektor bernorm yang lengkap disebut ruang *Banach*. Selanjutnya, suatu ruang vektor bernorm yang lengkap yang normnya diinduksi dari hasil-kali dalam disebut *ruang Hilbert*.

Contoh Ruang Hilbert

Perhatikan himpunan semua barisan bilangan kompleks x_n yaitu $l^2\ \mathbb{C}\ := \ x_n \ \Big|\ \sum |x_n|^2 < \infty\ .$ Misalkan $x_n = \ x_1, x_2, \ldots\ \in l^2\ \mathbb{C}$ dan $y_n = \ y_1, y_2, \ldots\ \in l^2\ \mathbb{C}$, didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar berturut-turut:

$$x_n + y_n = \ x_1, x_2, \ldots\ + \ y_1, y_2, \ldots\ = \ x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots$$

dan

$$\alpha x_n = \alpha\ \ x_1, x_2, \ldots\ = \ \alpha x_1, \alpha x_2, \ldots \quad \text{untuk setiap } \alpha \in \mathbb{C}\ .$$

Contoh Ruang Hilbert

Dapat ditunjukkan bahwa ruang barisan l^2 □ adalah ruang vektor atas □. Lebih lanjut, dengan hasil-kali dalam dan normnya berturut-turut adalah $\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$ dan $\|x\| = \langle x|x\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, dapat ditunjukkan bahwa ruang barisan l^2 □ suatu ruang *Hilbert*.

Basis ortonormal ruang Hilbert

Sebuah himpunan $\{u_j\}$ disebut himpunan ortonormal bila

$$\langle u_j , u_k \rangle = 0 \text{ untuk } j \neq k \text{ dan } \langle u_j , u_j \rangle = 1.$$

Lemma:

Misalkan $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ sebuah basis ortonormal dari ruang Hilbert H. Maka setiap $f \in H$ dapat dituliskan sebagai:

$$f = f_{\parallel} + f_{\perp},\ f_{\parallel} = \sum_{j=1}^{n} \langle u_j , f \rangle u_j ,$$

di mana $f_{\parallel}$ dan $f_{\perp}$ adalah saling ortogonal.

Basis ortonormal ruang Hilbert

Lemma:

Misalkan $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ sebuah basis ortonormal dari ruang Hilbert H.

Maka

$\langle u_j, f_\perp \rangle = 0$ untuk setiap $1 \le j \le n$. Dalam hal khusus

$$\| f \|^2 = \sum_{j=1}^{n} | \langle u_j, f \rangle |^2 + \| f_\perp \|^2 .$$

Juga setiap unsur $\tilde{f}$ di ruang yang direntang oleh $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ memenuhi

$$\left\| f - \tilde{f} \right\| \ge \| f_\perp \|$$

dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika $\tilde{f} = f_\parallel$.

Fungsi Bilinear

Definisi: Fungsi Bilinear

Misalkan U, V dan W merupakan ruang vektor atas lapangan F. Sebuah fungsi $f : U \times V \to W$ *adalah bilinear jika fungsi tersebut linear pada kedua variabelnya secara terpisah, yaitu:*

$$f(ru+su',v) = rf(u,v) + sf(u',v) \text{ ....(linear kiri)}$$

$$\text{dan } f(u,rv+sv') = rf(u,v) + sf(u,v') \text{ ....(linear kanan)}$$

$\forall r,s \in F ; v,v' \in V \text{ dan } u,u' \in U$

Contoh fungsi bilinear

a. Suatu hasil kali dalam $\langle . | . \rangle : V \times V \to R$ pada ruang vektor atas lapangan real adalah suatu fungsi bilinear.

b. Misalkan E, F ruang vektor dan M aljabar, kemudian $\phi : E \to M$ dan $\psi : F \to M$ masing-masing adalah suatu fungsi linear. Maka fungsi $\gamma : E \times F \to M$, dengan $\gamma(e, f) = \phi(e)\psi(f), \forall (e, f) \in E \times F$ adalah suatu fungsi bilinear.

Hasil kali tensor

Definisi: Hasil Kali Tensor

Misalkan U dan V merupakan ruang vektor atas lapangan F dan misalkan T subruang dari ruang vektor bebas $F_{U\times V}$ *yang dibangun oleh vektor-vektor berbentuk:*

$$r\ \ u,v\ \ +s\ \ u',v\ \ -\ \ ru+su',v\ \ ......(*)$$

$$dan\quad r\ \ u,v\ \ +s\ \ u,v'\ \ -\ \ u,rv+sv'\ \ ......(**)$$

$\forall r,s$ *skalar di* $F; u,u'\in U$ *dan* $v,v'\in V$. *Ruang kosien* $F_{U\times V}/T$ *dikatakan hasil kali tensor dari U dan V dan dinotasikan oleh* $U\otimes V$.

Hasil kali tensor

Setiap vektor yang dibangun oleh subruang T merupakan elemen nol pada ruang vektor $U \otimes V$. Dengan demikian elemen-elemen dari $U \otimes V$ berbentuk

$$\sum r_i \;\; u_i, v_i \;\; + T$$

tetapi biasanya koset $u, v \;\; + T$ dinotasikan oleh $u \otimes v$, oleh karena itu setiap elemen dari $U \otimes V$ ditulis dalam bentuk $\sum u_i \otimes v_i$ di mana

$$r \;\; u \otimes v \;\; + s \;\; u' \otimes v \;\; = \;\; ru + su' \;\; \otimes v \; ....(***)$$

dan $r \;\; u \otimes v \;\; + s \;\; u \otimes v' \;\; = u \otimes \;\; rv + sv' \;\; ...(****)$

Hasil kali tensor

Setiap elemen $U \otimes V$ tidak selalu dapat ditulis secara tunggal

$$\sum_{finite} u_i \otimes v_i = \sum_{finite} x_i \otimes y_i$$

jika dan hanya jika kita dapat menemukan elemen yang sama dalam bentuk jumlah berhingga lain.

Hasil kali tensor: konstruksi

Langkah 1

Misalkan U dan V merupakan ruang vektor atas lapangan F, kemudian kita konstruksi suatu ruang vektor bebas atas lapangan F dengan $U \times V$ sebagai generator. Berdasarkan definisi ruang vektor bebas, kita dapatkan

$$F_{U\times V} := \quad \sum_{finite} \lambda_i \quad u_i , v_i \quad : \lambda_i \in F, \quad u_i , v_i \quad \in U \times V \quad .$$

Ini adalah kombinasi linier berhingga dari elemen-elemen di $U \times V$.

Hasil kali tensor: konstruksi

Langkah 2

Selanjutnya pilih subruang T dari $F_{U\times V}$, yang dibangun oleh vektor-vektor berbentuk (*) dan (**). Kemudian akan dibuktikan bahwa pemetaan kanonik $\pi : F_{U\times V} \to F_{U\times V}/T$ di mana $\pi\left(\sum r_i \left(u_i, v_i\right)\right) = \pi\left(u,v\right) = \left(u,v\right) + T$ untuk setiap $\sum r_i \left(u_i, v_i\right) = \left(u,v\right) \in F_{U\times V}$, merupakan suatu fungsi bilinear. Artinya:

$\pi\left(ru + su', v\right) = r\pi\left(u,v\right) + s\pi\left(u',v\right)$ ....(linear kiri)

dan

$\pi\left(u, rv + sv'\right) = r\pi\left(u,v\right) + s\pi\left(u,v'\right)$ ....(linear kanan)

$\forall r,s \in F\,; v,v' \in V$ dan $u,u' \in U$

Hasil kali tensor: elemen tensor

Berdasar definisi hasil kali tensor dari ruang vektor U dan V (dinotasikan $U \otimes V$) adalah ruang kosien $F_{U\times V}/T$. Sehingga setiap elemen dari $U \otimes V$ merupakan suatu hasil pemetaan kanonik $\pi : F_{U\times V} \to F_{U\times V}/T$ dengan $\pi \;\; u,v \;\; = \;\; u,v \; + T$, selanjutnya koset $u,v \; + T$ dikatakan elemen tensor dari $U \otimes V$ yang dinotasikan sebagai $u \otimes v$.

Berdasarkan (***) dan (****) elemen tensor tersebut bersifat:

$$r \;\; u \otimes v \;\; + s \;\; u' \otimes v \;\; = \;\; ru + su' \;\; \otimes v$$

$$r \;\; u \otimes v \;\; + s \;\; u \otimes v' \;\; = u \otimes \;\; rv + sv'$$

untuk setiap $u, u' \in U \, ; v, v' \in V$ dan skalar $r, s \in F$.

Hasil kali tensor: sifat universal

Teorema 3.8.1: Sifat Universal Hasil Kali Tensor

Misalkan U dan V merupakan ruang vektor atas lapangan F. Suatu fungsi $t : U \times V \rightarrow U \otimes V$ *adalah fungsi bilinear yang didefinisikan oleh*

$$t(u,v) = u \otimes v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.8.1.1)$$

Jika $f : U \times V \rightarrow W$ *adalah sembarang fungsi bilinear dari* $U \times V$ *pada suatu ruang vektor W atas F, maka terdapat suatu transformasi linear unik* $\tau : U \otimes V \rightarrow W$ *sehingga*

$$\tau \circ t = f \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.8.1.2)$$

Jika terdapat $s : U \times V \rightarrow X$ *fungsi bilinear lain yang memenuhi sifat tersebut, maka* $X \cong U \otimes V$

Hasil kali tensor: sifat universal

$$
\begin{tikzcd}
U \times V \arrow[rr, "t \ \text{bilinear}"] \arrow[drr, "f \ \text{bilinear}"'] & & U \otimes V \arrow[d, "\tau \ \text{linear}"] \\
& & W
\end{tikzcd}
$$

Gambar 3.8.1

Sifat universal hasil kali tensor