ALJABAR TOEPLITZ TERPELINTIR DARI GRUP TERURUT

RIZKY ROSJANUARDI

Abstrak. Misalkan Γ^+ adalah bagian positif dari grup abelian terurut total, dan σ kosikel pada Γ. Melalui teori produk silang terpelintir akan dibahas struktur dari aljabar Toeplitz terpelintir $\mathcal{T}(\Gamma, \sigma)$.

1. Pendahuluan

Teori aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ dikembangkan pertama kali oleh Coburn [5] untuk $\Gamma = \mathbb{Z}$. Teori ini selanjutnya dikembangkan oleh Douglas [6] untuk Γ subgrup dari $\mathbb{R}$, oleh Murphy [10] untuk Γ sebarang grup abelian terurut total. Untuk grup yang sama, selanjutnya Adji, Laca, Nilsen dan Raeburn [3] melakukan pengembangan dengan pendekatan berbeda. Adji, dkk. menggunakan teori produk silang dari semigrup endomorfisma. Penelitian-penelitian ini bermuara kepada kesimpulan yang menarik, yaitu aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ adalah universal terhadap representasi isometri (non-uniter) dari Γ^+.

Ji [7] melakukan pengembangan teori aljabar Toeplitz melalui arah yang berbeda. Jika peneliti sebelumnya melakukan perumuman dari Γ, Ji bekerja pada subgrup Γ yang padat dari $\mathbb{R}$ dengan menerapkan konsep pelintiran σ. Ji membuktikan bahwa aljabar Toeplitz dengan konsep baru ini memiliki sifat universal terhadap representasi σ-isometri (non-uniter) dari Γ. Untuk selanjutnya Ji menotasikan aljabar ini dengan $\mathcal{T}(\Gamma, \sigma)$.

Pada tulisan ini disajikan perumuman dari teori aljabar Toeplitz untuk Γ grup abelian terurut total dengan menerapkan konsep pelintiran σ. Metoda pembuktian untuk versi takterpelintir selalu dapat diadopsi untuk versi terpelintir sehingga pada paper ini tidak akan disertakan bukti dari hasil yang diperoleh.

2. Produk Silang Terpelintir atas Semigrup dari Endomorfisma

Misalkan Γ grup abelian terurut total, dan Γ^+ kerucut positif dari Γ. Misalkan $\sigma : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{T}$ sebuah pelintiran pada Γ, yaitu $\sigma(x,y)\sigma(x+y,z) = \sigma(x,y+z)\sigma(y,z)$ untuk setiap $x,y,z \in \Gamma$ dan $\sigma(x,0) = \sigma(0,x) = 1$ untuk setiap $x \in \Gamma$. Sebuah *sistem dinamik terpelintir* $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ adalah sebuah sistem terdiri dari aljabar-C^* A, sebuah aksi $\alpha : \Gamma^+ \to \mathrm{Endo}(A)$ dari Γ^+ pada A melalui endomorfisma sedemikian sehingga setiap α_t dapat diperluas. Sebuah *representasi kovarian (terpelintir)* dari $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ adalah pasangan (π, V) yang mana π representasi nondegenerate dari A, V representasi σ-isometri dari Γ^+, yaitu $V_sV_t = \sigma(s,t)V_{s+t}$, dan memenuhi kondisi kovarian $\pi(\alpha_t(a)) = V_t\pi(a)V_t^*$ untuk $a \in A$ dan $t \in \Gamma^+$.

Kami meniru [8] untuk definisi *produk silang terpelintir* dari $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$. Yaitu triplet (B, i_A, i_{Γ^+}) dari aljabar-C^* B bersama dengan homomorfisma nondegenerate $i_A : A \to B$, homomorfisma $i_{\Gamma^+} : \Gamma^+ \to M(B)$ dari Γ^+ sedemikian sehingga $i_{\Gamma^+}(s)i_{\Gamma^+}(t) = \sigma(s,t)i_{\Gamma^+}(s+t)$ untuk setiap $s,t \in \Gamma^+$, dan memenuhi kondisi berikut:

1) $i_A(\alpha_t(a)) = i_{\Gamma^+}(t)i_A(a)i_{\Gamma^+}(t)^*$ untuk $a \in A$ dan $t \in \Gamma^+$;
2) untuk sebarang representasi kovarin (π, V) dari $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$, terdapat representasi nondegenerate $\pi \times V$ dari B sedemikian sehingga $(\pi \times V) \circ i_A = \pi$ dan $\overline{(\pi \times V)} \circ i_{\Gamma^+} = V$;
3) B dibangun oleh unsur berbentuk $\{i_A(a) : a \in A\}$ dan $\{i_{\Gamma^+}(x) : x \in \Gamma^+\}$.

Catatan 2.1. Seperti pada kasus takterpelintir [4, Lemma 1.1] dan [3, Remark 1.1(i)], aljabar-C^* B adalah penutup dari

$$\mathrm{span}\{i_{\Gamma^+}(x)i_A(a)i_{\Gamma^+}(y)^* : x,y \in \Gamma^+, a \in A\}.$$

Jika sebuah sebuah sistem dinamik $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ memiliki representasi kovarian taktrivial maka produk silang terpelintir (B, i_A, i_{Γ^+}) dapat dikonstruksi dengan cara yang persis dengan pengkonstruksian produk silang takterpelintir [1, Proposition 4.2.2].

Produk silang (B, i_A, i_{Γ^+}) adalah unik dalam pengertian bahwa jika (C, j_A, j_{Γ^+}) produk silang terpelintir untuk $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ maka terdapat isomorfisma $\psi : B \to C$

sedemikian sehingga $\psi \circ i_A = j_A$ dan $\psi \circ i_{\Gamma^+} = j_{\Gamma^+}$. Selanjutnya produk silang dari $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ dinotasikan dengan $A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+$.

Lebih jauh, sifat dari pelintiran yang ekivalen mengakibatkan produk silang tidak bergantung pada pemilihan pelintiran. Misalkan $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ dan $(A, \Gamma^+, \alpha, \omega)$ dua buah sistem dinamik yang memiliki representasi kovarian taktrivial, dan $[\sigma] = [\omega]$ di $H^2(\Gamma, \mathbb{T})$. Maka produk silang $A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+$ isomorfik dengan $A \times_{\alpha,\omega} \Gamma^+$.

Dalam [8, Theorem 2.1], Laca secara eksplisit menyatakan bahwa bukti serupa dari versi takterpelintir (Theorem 1.2 [3]) tentang representasi faithful dari produk silang dapat diterapkan untuk versi terpelintir. Hal ini dikarenakan pada setiap perhitungan, peran pelintiran selalu dapat dikesampingkan.

Teorema 2.2. [3, Theorem 1.2] *Misalkan A adalah aljabar-C^* dengan satuan. Misalkan (π, V) representasi kovarian dari sistem dinamik $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ sedemikian sehingga*

(i) *π injektif, dan*

(ii) *untuk setiap subhimpunan hingga F dari Γ^+ dan semua pemilihan $a_{x,y} \in A$ memenuhi*

$$\| \sum_{x \in F} V_x^* \pi(a_{x,x}) V_x \| \leq \| \sum_{x,y \in F} V_x^* \pi(a_{x,y}) V_y \|.$$

Maka $\pi \times V$ adalah representasi faithful dari $A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+$.

Seperti pada kasus takterpelintir, sebuah ideal I dari aljabar-C^* A akan menginduksi ideal dari produk silang.

Proposisi 2.3. [1, Theorem 6.0.7 (ii)] *Misalkan $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ adalah sistem dinamik, I adalah ideal invarian-α yang dapat diperluas dari A dan perhatikan sistem dinamik $(I, \Gamma^+, \alpha|_I, \sigma)$. Maka ideal $D := \overline{\operatorname{span}}\{j_{\Gamma^+}(x)^* i_A(a) j_{\Gamma^+}(y) : a \in I, x, y \in \Gamma^+\}$ adalah produk silang untuk $(I, \alpha|_I, \sigma, \Gamma^+)$, sehingga $(I \times_{\alpha|_I,\sigma} \Gamma^+, \varphi \circ i_A|_I, \bar{\varphi} \circ j_{\Gamma^+})$ ideal dari $(A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+, i_A, j_{\Gamma^+})$, dimana*

$$\varphi : A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+ \to M(D) \tag{2.1}$$

dan homomorfisma kanonik $\varphi(a)a' = aa'$ *(eksistensi* φ *dijamin oleh Theorem. 3.1.8 dari* [10]*)* .

3. Produk Silang $B_{\Gamma^+} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+$

Pandang subaljabar-C^* B_{Γ^+} dari $\ell^\infty(\Gamma)$ yang dibangun $\{1_x : x \in \Gamma^+\}$, dimana

$$1_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{jika } y \geq x, \\ 0 & \text{lainnya .} \end{cases}$$

Aljabar-C^* B_{Γ^+} memiliki satuan 1_0. Untuk setiap x di Γ^+ automorfisma $\tau_x \in \operatorname{Aut} \ell^\infty(\Gamma)$ yang didefinisikan oleh $\tau_x(f)(y) = f(y-x)$ memenuhi $\tau_x(1_y) = 1_{x+y}$. Akibatnya restriksi dari τ di Γ^+ mendefinisikan sebuah aksi Γ^+ melalui endomorfisma dari B_{Γ^+}.

Misalkan σ sebuah pelintiran di Γ. Perhatikan sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \tau, \sigma)$. Untuk setiap $y \in \Gamma^+$, pemetaan $V_y : \ell^2(\Gamma^+) \to \ell^2(\Gamma^+)$ yang didefinisikan oleh

$$(V_y f)(x) = \begin{cases} \sigma(-x, y) f(x-y) & \text{jika } x \geq y, \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{3.1}$$

yang dipelajari oleh Ji dalam [7] adalah representasi σ-isometrik nonuniter dari Γ^+.

Untuk setiap subhimpunan hingga F dari Γ^+ definisikan

$$\pi_V : \sum_{x \in F} \gamma_x 1_x \mapsto \sum_{x \in F} \gamma_x V_x V_x^*.$$

Perdefinisi, π_V menyatakan pemetaan linear pada span$\{1_x : x \in \Gamma^+\}$ dan selanjutnya pada B_{Γ^+}. Rumus $\tau_x(1_y) = 1_{x+y}$ mengakibatkan bahwa (π_V, V) kovarian di span$\{1_x : x \in \Gamma^+\}$ yang selanjutnya pada B_{Γ^+} oleh kekontinuan. Akibatnya sistem $(B_{\Gamma^+}, \tau, \sigma, \Gamma^+)$ memiliki representasi kovarian taktrivial.

Pada kasus takterpelintir, Proposition 2.2 dari [3] membuktikan bahwa representasi kovarian dari sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \tau, \Gamma^+)$ berkorespondensi secara bijektif dengan representasi isometrik dari Γ^+: untuk sebarang representasi V dari Γ^+ terdapat representasi π_V dari B_{Γ^+} sedemikian sehingga (π_V, V) adalah representasi kovarian dari $(B_{\Gamma^+}, \tau, \Gamma^+)$, dan sehingga $\pi_V \times V$ adalah representasi dari produk silang $B_{\Gamma^+} \times_\tau \Gamma^+$. Ini menunjukkan bahwa $B_{\Gamma^+} \times_\tau \Gamma^+$ memiliki sifat universal terhadap representasi dari Γ^+. Lebih jauh mereka membuktikan bahwa untuk representasi isometrik V dari Γ^+, representasi $\pi_V \times V$ adalah faithful jika dan hanya jika V nonuniter (yaitu setiap V_x adalah nonuniter). Akibatnya aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ yang dibangun oleh T_x di $B(\ell^2(\Gamma^+))$, universal terhadap representasi isometrik dari of Γ^+.

Kami ingin mempunyai semua hasil dalam [3] untuk versi terpelintir.

Proposisi 3.1. [3, Proposition 2.2] *Perhatikan sistem dinamik* $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \tau, \sigma)$.

1) *Jika* ρ *adalah representasi unital dari* $B_{\Gamma^+} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+$, *maka* $\rho \circ i_{\Gamma^+}$ *adalah sebuah representasi* σ*-isometrik dari* Γ^+.
2) *Jika* V *adalah representasi* σ*-isometrik dari* Γ^+, *maka terdapat representasi* π_V *of* B_{Γ^+} *sedemikian sehingga* (π_V, V) *adalah representasi kovarian (terpelintir) dari* $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \tau, \sigma)$. *Lebih jauh jika setiap* V_x *non-uniter maka* π_V *adalah faithful .*
3) $B_{\Gamma^+} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+$ *dibangun oleh* $\{i_{\Gamma^+}(x) : x \in \Gamma^+\}$, *dan*

$$B_{\Gamma^+} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+ = \overline{\operatorname{span}}\{i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y)^* : x, y \in \Gamma^+\}.$$

4) $i_{B_{\Gamma^+}} : B_{\Gamma^+} \to B_{\Gamma^+} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+$ *injektif.*

Perhatikan sistem dinamik $(B_{\Gamma^+,\infty}, \Gamma^+, \tau, \sigma)$, dimana $B_{\Gamma^+,\infty}$ adalah subaljabar dari B_{Γ^+} yang dibangun oleh $\{1_x - 1_y : y \geq x \in \Gamma^+\}$. Dengan mengaplikasikan Proposisi 2.3 diperoleh $B_{\Gamma^+,\infty} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+$ adalah ideal dari $B_{\Gamma^+} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+$.

Teorema 3.2. [3, Theorem 2.4] *Misalkan* V *sebuah representasi* σ*-isometrik dari* Γ^+. *Maka* $\pi_V \times V$ *adalah representasi faithful dari* $B_{\Gamma^+} \times_{\tau,\sigma} \Gamma^+$ *jika dan hanya jika setiap* V_x *nonuniter.*

Teorema 3.3. [3, Corollary 2.5] *Misalkan* Γ *grup abelian terurut total dan* V, W *representasi* σ*-isometrik dari* Γ^+ *sebagai isometri nonuniter. Maka pemetaan* $V_x \mapsto W_x$ *adalah isomorfisma dari* $C^*(V_x, \sigma)$ *pada* $C^*(W_x, \sigma)$.

4. Aljabar Toeplitz Terpelintir

Misalkan σ sebuah pelintiran pada Γ, untuk setiap $y \in \Gamma^+$ definisikan operator $T_y : \ell^2(\Gamma^+) \to \ell^2(\Gamma^+)$ dengan aturan

$$(T_y f)(x) = \begin{cases} \sigma(-x,y)f(x-y) & \text{jika } x \geq y, \\ 0 & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Aljabar Toeplitz terpelintir $\mathcal{T}(\Gamma,\sigma)$ adalah aljabar- C^* yang dibangun $\{T_y : y \in \Gamma^+\}$, dan $\mathcal{C}(\Gamma,\sigma)$ adalah ideal komutator terpelintir di $\mathcal{T}(\Gamma,\sigma)$ yang dibangun oleh

$$\{T_y T_x^* - \sigma(y,-x)\overline{\sigma(-x,y)}T_x^* T_y : x, y \in \Gamma^+\}. \tag{4.2}$$

Untuk setiap y di Γ^+, T_y adalah isometri nonuniter, sehingga T merupakan representasi σ-isometri dari Γ^+. Dengan demikian Teorema 3.3 memberikan akibat berikut.

Teorema Akibat 4.1. [7, Theorem 1] *Aljabar Toeplitz terpelintir $\mathcal{T}(\Gamma,\sigma)$ adalah aljabar-C^* yang universal terhadap representasi $\sigma-$isometri (nonuniter) dari Γ^+.*

Selanjutnya karena produk silang tidak bergantung kepada pemilihan wakil dari pelintiran, maka untuk σ dan ω dengan $[\sigma] = [\omega]$ di $H^2(\Gamma,\mathbb{T})$, diperoleh $\mathcal{T}(\Gamma,\sigma)$ isomofik dengan $\mathcal{T}(\Gamma,\omega)$.

5. Ideal Invarian

Teorema kami berikutnya adalah versi terpelintir dari [1, Theorem 6.0.7] dan [2, Theorem 3.1]. teorema ini juga versi terpelintir dari Theorem 1.7 [9] untuk kasus Γ grup abelian terurut total.

Teorema 5.1. [1, Theorem 6.0.7] *Misalkan $(A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+, i_A, j_{\Gamma^+})$ produk silang dari sistem dinamik $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ dengan endomorfisma yang dapat diperluas, dan misalkan I sebuah ideal invarian-α dari A yang dapat diperluas. Maka terdapat barisan eksak pendek*

$$0 \to I \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+ \xrightarrow{\Psi} A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+ \xrightarrow{\Phi} A/I \times_{\tilde{\alpha},\sigma} \Gamma^+ \to 0.$$

Teorema akibat yang berikut merupakan perluasan dari Theorem 1 (iii) dari Ji [7] untuk kasus yang lebih umum. Seperti halnya Phillips dan Raeburn [11] yang termotovasi untuk memperumum grup dan urutan yang terkait, kami termotivasi untuk bekerja pada sebarang grup abelian terurut total.

Teorema Akibat 5.2. [7, Theorem 1 (iii)] *Terdapat barisan eksak pendek*

$$0 \to \mathcal{C}(\Gamma, \sigma) \to \mathcal{T}(\Gamma, \sigma) \to C^*(\Gamma, \sigma) \to 0, \tag{5.1}$$

dimana $\mathcal{C}(\Gamma, \sigma)$ *adalah ideal komutator terpelintir dari of* $\mathcal{T}(\Gamma, \sigma)$ *yang dibangun oleh (4.2), dan* $C^*(\Gamma, \sigma)$ *adalah grup aljabar-*C^* *terpelintir.*

Ucapan Terimakasih

Makalah ini merupakan hasil penelitian pada tahun pertama penulis mengikuti Program S-3 di ITB dan program penelitian di The University of Newcastle, Australia. Untuk itu penulis mengucapkan rasa terima kasih yang tak terhingga kepada para pembimbing, terutama kepada DR. Sriwulan Adji dan Prof. Iain Raeburn yang telah banyak meluangkan waktu untuk memberikan ide-ide utama serta membimbing penulis dalam melakukan penelitian, juga kepada Prof. Moedomo yang telah memberikan semangat dan dorongan moril dalam penulisan paper ini.

Daftar Pustaka

[1] S. Adji, *Crossed products of C^*- algebras by semigroups of endomorphisms*, thesis, The University of Newcastle (1995).

[2] S. Adji, *Invariant ideals of crossed products by semigroups of endomorphisms*, Proc. of a Conference of Manila October 1996, Springer, Singapore (1997), 1-8.

[3] S. Adji, M. Laca, M. Nilsen and I. Raeburn, *Crossed products by semigroups of endomorphisms and the Toeplitz algebras of ordered groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **122**, Number 4 (1994), 1133-1141.

[4] S. Boyd, N. Keswani and I. Raeburn, *Faithful representations of crossed products by endomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc **118** (1993), 427-436.

[5] L. A. Coburn *The C^*-algebra generated by an isometry I*, Bull. Amer. math. Soc. **73** (1967), 722-726.

[6] R. G. Douglas, *On the C^*-algebra of a one parameter semigroup of isometries*, Acta Math. **128** (1972), 143-151.

[7] R. Ji, *Toeplitz operators on noncommutative tori and their real valued index*, Proc. of symposia in pure mathematics **51** part 2 (1990).

[8] M. Laca, *Discrete product systems with twisted units*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. **52** (1995), 317-326.

[9] N. S. Larsen, *Nonunital semigroup crossed product*, Math. Proc. Royal Irish Acad. (**2**)100A (2000), 205-218.

[10] G.J. Murphy, *Ordered group and Toeplitz algebras*, J. Operator Theory **18** (1987), 303-326.

[11] J. Phillips and I. Raeburn, *Semigroups of isometries, Toeplitz algebras and twisted crossed products*, Integr. Equat. Oper. Th. Vol **17** (1993), 579-602.

Departmen Matematika Institut Teknologi Bandung, Jurusan Pendidikan Matematika UPI Bandung

E-mail address: rizky@dns.math.itb.ac.id