1 PENDAHULUAN

Pada bagian Pendahuluan akan diperkenalkan beberapa konsep penting yang akan muncul dalam perumusan masalah.

1.1 Pokok Pokok Teori Aljabar-C^*

Misalkan A adalah sebuah aljabar bernorm atas $\mathbb{C}$. Apabila A adalah lengkap terhadap norm $\|.\|$, dan memenuhi $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ untuk semua a, b di A, maka A disebut aljabar Banach. **Involusi** pada A adalah pemetaan $a \mapsto a^*$ dari A ke A, sehingga bila a, b di A dan α di $\mathbb{C}$ berlaku :

(i) $(a^*)^* = a$
(ii) $(ab)^* = b^*a^*$
(iii) $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha}a^* + b^*$

Bila untuk setiap a di A berlaku $\|a^*a\| = \|a\|^2$, maka A disebut sebuah **aljabar-C^***.

Contoh 1:
Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ merupakan aljabar-C^* dengan operasi kali bilangan kompleks, konjuget sebagai involusi, dan norm modulus .

Contoh 2:
Misalkan X himpunan kompak. Ruang fungsi $C(X) := \{f : X \to \mathbb{C} | f$ kontinu di $X\}$ merupakan aljabar-C^* dengan $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $fg(x) = f(x)g(x)$, untuk setiap $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $f, g \in C(X)$, involusinya adalah $f^*(x) = \overline{f(x)}$, dan $\|f\| = sup_{x \in X}|f(x)|$.

Contoh 3:
Ruang matriks $M_n(\mathbb{C})$ adalah aljabar-C^* dengan operasi kali matriks dan involusinya transpos konjuget dan norm $\|T\| = sup\{\|Th\| | h \in \mathbb{C}^n, dan \|h\| \leq 1\}$.

Contoh 4:
Ruang operator terbatas di ruang Hilbert H, yaitu
$B(H) := \{\phi : H \to H | \phi$ linier dan terbatas$\}$ adalah aljabar-C^* dengan operasi kalinya komposisi, involusinya operator ajoin dan norm $\|T\| = sup\{\|Tv\| | v \in H, dan \|v\| \leq 1\}$

Aljabar-C^* pada contoh 1 dan 2 komutatif, sedangkan pada contoh 3 dan 4 tidak komutatif. Aljabar-C^* pada contoh-contoh di atas semuanya memuat unsur satuan. Unsur satuan di $\mathbb{C}$ adalah 1. Satuan di $C(X)$ fungsi $1_{C(X)}$ dengan $1_{C(X)}(x) = 1$, untuk setiap $x \in X$. Unsur satuan di $M_n(\mathbb{C})$ matriks identitas $I_{M_n(\mathbb{C})}$, dan unsur identitas di $B(H)$ operator identitas $I_{B(H)}$ dengan $I_{B(H)}(x) = x$, untuk setiap $x \in H$. Berikut ini contoh aljabar-C^* yang tidak memuat unsur satuan :

Contoh 5:
Ruang fungsi $C_0(\mathbb{R})$, yaitu fungsi-fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dengan ciri untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat himpunan kompak $F_{f,\epsilon} \subset \mathbb{R}$, sedemikian sehingga $|f(x)| < \epsilon$ untuk setiap $x \notin F_{f,\epsilon}$.

Teorema berikut menyatakan bahwa ruang fungsi kontinu $C(X)$ (atau $C_0(X)$) merupakan model dari C^*-aljabar yang komutatif.

Teorema 1 (Teorema Gelfand Naimark)
jika A adalah aljabar-C^* komutatif dengan unsur satuan, maka A isomorf$-^*$ dengan $C(X)$ untuk suatu himpunan kompak X.
jika A adalah aljabar-C^* komutatif tanpa unsur satuan, maka A isomorf-* dengan $C_0(X)$ untuk suatu himpunan kompak lokal X.

Definisi: Representasi π dari C^*-aljabar A pada ruang Hilbert H adalah homomorfisma$-^*$

$\pi : A \longrightarrow B(H)$. Representasi π disebut **injektif** apabila π satu-satu , dan π disebut **nondegenerate** apabila $\overline{sp}\{\pi(a)h : a \in A, h \in H\} = H$

(Catatan: Dalam hal A aljabar-C^* yang memiliki satuan, representasi π nondegenerate sama artinya dengan representasi π unital yaitu $\pi(1_A) =$ operator identitas $I_{B(H)}$)

Teorema 2 (Teorema Gelfand-Naimark-Seagal):
Setiap aljabar-C^* A selalu dapat direpresentasikan secara nondegenerate dan injektif ke suatu ruang Hilbert H.

Dengan kata lain, jika A adalah aljabar-C^* maka akan terdapat representasi $\pi : A \longrightarrow B(H)$ sedemikian sehingga π nondegenerate dan injektif. Perhatikan bahwa $\pi(A)$ adalah subaljabar-* dari $B(H)$ dan tutup, akibatnya $\pi(A)$ adalah subaljabar-C^* dari $B(H)$. Oleh karenanya, kita akan dapat mengenali A sebagai subaljabar-* dari $B(H)$.

Sebelum ke materi selanjutnya, akan dituliskan beberapa terminologi yang diperlukan. Operator $S \in B(H)$ disebut **isometri** apabila $\|Sh\| = \|h\|$, untuk setiap $h \in H$. Definisi ini ekivalen dengan $S \in B(H)$ **isometri** apabila $S^*S = I_{B(H)}$. Operator $S \in B(H)$ disebut uniter apabila $S^*S = SS^* = I_{B(H)}$. Himpunan $\{S \in B(H) : S \text{ isometri}\}$ kita tuliskan sebagai $Isom(H)$.

Terminologi lain yang sangat penting dalam pekerjaan kita adalah **representasi isometrik dari sebuah semigrup**, akan dituliskan berikut ini. Misalkan Γ adalah grup abelian dan terurut total, $\Gamma^+ = \{x \in \Gamma : x \geq 0\}$ (apabila tidak disebutkan lebih lanjut, Γ dan Γ^+ memiliki arti seperti ini). Representasi isometrik V dari Γ^+ pada ruang Hilbert H adalah homomorfisma $V : \Gamma^+ \rightarrow Isom(H)$. Selanjutnya $C^*(V_x : x \in \Gamma^+)$ adalah aljabar-C^* di $B(H)$ yang dibangun oleh $\{V_x : x \in \Gamma^+\}$.

1.2 Aljabar Toeplitz

Pandang himpunan $\hat{\Gamma} = \{\gamma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{T} : \gamma \text{ homomorfisma }\}$, dimana $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Himpunan $\hat{\Gamma}$ membentuk grup dengan operasi perkalian titik demi titik :

$$\gamma\chi(x) = \gamma(x)\chi(x), \text{ untuk setiap } x \in \Gamma.$$

Lebih jauh lagi $\hat{\Gamma}$ dapat dilengkapi dengan topologi melalui pemetaan $\gamma \mapsto (\gamma(x))_{x\in\Gamma}$ dari $\hat{\Gamma}$ ke ruang topologi $\prod \mathbb{T}$. Jadi topologi ini adalah topologi dari kekonvergenan titik demi titik di Γ. Grup $\hat{\Gamma}$ dengan topologi di atas disebut sebagai **grup dual** dari Γ. Grup dual $\hat{\Gamma}$ adalah grup kompak karena grup Γ yang kita gunakan adalah grup dengan topologi diskrit [CON, Proposition 9.15, hal 230]. Karena grup dual $\hat{\Gamma}$ kompak maka ukuran Haar dapat didefinisikan di $\hat{\Gamma}$ [CON, theorem 11.4 hal. 155]). Dengan demikian kita dapat mengintegralkan fungsi di $\hat{\Gamma}$ terhadap ukuran Haar μ tersebut. Karena ukuran Haar dari himpunan kompak itu berhingga, maka kita dapat menormalisasi integral. Selanjutnya kita juga dapat membentuk ruang Hilbert $L^2(\hat{\Gamma}) = \left\{ f : \hat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\hat{\Gamma}} |f(\gamma)|^2 d\mu(\gamma) \leq \infty \right\}$ dengan hasil kali dalam $(f|g) = \int_{\hat{\Gamma}} f(\gamma)\overline{g(\gamma)}d\mu(\gamma)$.

Sekarang perhatikan jika $x \in \Gamma$, maka pemetaan evaluasi $\epsilon_x : \hat{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{C}$ (di mana $\epsilon_x(\gamma) = \gamma(x)$) merupakan unsur di $L^2(\hat{\Gamma})$. Dapat ditunjukkan bahwa himpunan $\{\epsilon_x : x \in \Gamma^+\}$ adalah himpunan basis ortonormal dari $L^2(\hat{\Gamma})$. Kemudian $\overline{sp}\{\epsilon_x : x \in \Gamma^+\}$ dari $L^2(\hat{\Gamma})$ disebut **ruang Hardy**, dan ditulis sebagai $H^2(\hat{\Gamma})$. Karena ruang Hardy $H^2(\hat{\Gamma})$ adalah subruang tutup dari $L^2(\hat{\Gamma})$, maka terdapat proyeksi $P : L^2(\hat{\Gamma}) \longrightarrow H^2(\hat{\Gamma})$. Selanjutnya untuk $\phi \in C(\hat{\Gamma})$, operator Toeplitz T_ϕ didefinisikan sebagai berikut:

$$T_\phi : H^2(\hat{\Gamma}) \longrightarrow H^2(\hat{\Gamma}); \quad T_\phi(f) = P(\phi f)$$

Jadi operator Toeplitz T_ϕ unsur di $B(H^2(\hat{\Gamma}))$. Fokus objek yang kita pelajari adalah **aljabar Toeplitz** yaitu aljabar-C^* yang dibangun oleh semua operator Toeplitz $\left\{T_\phi : \phi \in C(\hat{\Gamma})\right\}$. Notasi baku untuk aljabar Toeplitz adalah $\mathcal{T}(\Gamma)$. Dapat dibuktikan bahwa aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ yang terdefinisi di atas, adalah merupakan aljabar-C^* yang dibangun oleh semigrup isometri nonuniter $\{T_{\epsilon_x} : x \in \Gamma^+\}$ di $B(H)$, dan pemetaan $T : \Gamma^+ \longrightarrow \mathcal{T}(\Gamma)$; $T(x) = T_{\epsilon_x}$ adalah representasi isometri dari Γ^+ ke $B(H^2(\hat{\Gamma}))$.

Teorema 3 (Teorema Murphy) [M, Theorem 2.9]
Misalkan Γ adalah grup abel terurut total, dan $\Gamma^+ = \{x \in \Gamma : x \geq 0\}$ adalah **positive cone**. Maka aljabar-C^* yang dibangun oleh semigrup isometri nonuniter dari sebuah representasi isometri $V : \Gamma^+ \longrightarrow B(H)$, bersifat universal. Artinya : jika terdapat representasi isometri nonuniter (yang lain) $W : \Gamma^+ \longrightarrow B(H)$ maka $C^*(V_x : x \in \Gamma^+)$ harus isomorfik$-^*$ dengan $C^*(W_x : x \in \Gamma^+)$, dan isomorfismanya memetakan V_x ke W_x.

Catatan: Perlu diketahui bahwa teorema ini adalah generalisasi dari Teorema terkenal dari Coburn [C] (untuk kasus khusus apabila $\Gamma = \mathbb{Z}$), dan Teorema dari Douglas [D] untuk kasus apabila $\Gamma =$ subgrup dari $\mathbb{R}$.

Sebagai akibat dari Teorema Murphy diatas, kita dapat menyimpulkan bahwa **semua** aljabar-C^* yang dibangun oleh semigrup isometri dari Γ^+ akan "mengalir" dan "bermuara" ke aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$. Dengan kata lain aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ adalah sebuah model konkrit (yang sangat penting), untuk klasifikasi aljabar C^* yang dibangun oleh semigrup isometri dari Γ^+.

1.3 Aljabar Toeplitz Terpelintir

Sebuah kosikel pada grup Γ adalah pemetaan $\sigma : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}$ yang memenuhi $\sigma(x,y)\sigma(x+y,z) = \sigma(x,y+z)\sigma(y,z)$ untuk setiap x,y,z di Γ dan $\sigma(x,0) = \sigma(0,x) = 1$ untuk setiap $x \in \Gamma$. Γ. Contoh yang paling sederhana untuk kosikel pada grup Γ adalah kosikel **trivial** , yaitu σ dengan $\sigma(x,y) = 1$ untuk setiap $x,y \in \Gamma$. Salah satu contoh dari kosikel yang tidak trivial adalah σ_1 dengan

$$\sigma_1(x,y) = \begin{cases} 1, & jika\ x{=}0\ atau\ y{=}0 \\ i & untuk\ x,\ y\ \ lainnya \end{cases}$$

Misalkan σ_1 dan σ_2 adalah dua buah kosikel pada Γ. Kosikel σ_1 dan σ_2 dikatakan **ekivalen** jika dan hanya jika terdapat sebuah pemetaan $\nu : \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}$ sedemikian sehingga :

$$\sigma_1(x,y) = \sigma_2(x,y)\frac{\nu(x+y)}{\nu(x)\nu(y)}, \quad \text{untuk setiap } x,y \in \Gamma$$

Kelas kohomologi $[\sigma]$ didefinisikan sebagai himpunan yang terdiri dari semua kosikel di Γ yang ekivalen dengan σ.

Representasi σ-isometrik V dari Γ^+ adalah pemetaan $V : \Gamma^+ \to Isom(H)$ yang memenuhi $V_xV_y = \sigma(x,y)V_{x+y}$. Selanjutnya didefinisikan **aljabar Toeplitz terpelintir** $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$ adalah aljabar-C^* yang dibangun oleh $\{V_x : x \in \Gamma^+\}$.

Berikut ini akan dibahas sebuah contoh aljabar Toeplitz terpelintir. Misalkan σ suatu kosikel pada Γ. Perhatikan ruang Hilbert $l^2(\Gamma^+) :=$ ruang semua fungsi $f : \Gamma^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ dengan $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \Gamma^+$ kecuali untuk sejumlah terhitung $x \in \Gamma^+$, dan $\sum_{x\in\Gamma^+} |f(x)|^2 < \infty$, dengan hasil kali dalam $(f|g) = \sum_{x\in\Gamma^+} f(x)\overline{g(x)}$. Untuk $y \in \Gamma^+$, definisikan pemetaan $T_y : l^2(\Gamma^+) \longrightarrow l^2(\Gamma^+)$ dengan:

$$T_y f(x) = \begin{cases} \sigma(-x,y)f(x-y), & \text{jika } x \geq y \\ 0, & \text{jika } 0 \leq x < y \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $T_y(f)$ linier terbatas di $l^2(\Gamma^+)$ dengan $\|f\| = \|T_\gamma(f)\|$, untuk setiap $f \in l^2(\Gamma^+)$ dengan demikian T_y adalah isometri untuk setiap $y \in \Gamma^+$. Sekarang perhatikan bahwa $T_{y_1}T_{y_2} =$

$\sigma(y_1, y_2)T_{y_1y_2}$, dengan demikian T adalah representasi σ-isometri dari Γ^+. Dengan demikian aljabar-C^* yang dibangun oleh $\{T_y : y \in \Gamma^+\}$ merupakan contoh aljabar Toeplitz terpelintir.

Untuk kasus khusus dimana Γ merupakan subgrup padat di $\mathbb{R}$, Ji telah membuktikan sifat keuniversalan aljabar Toeplitz terpelintir. Lebih tepatnya teorema Ji dituliskan di bawah ini.

Teorema 4 (Teorema Ji) [Ji, Theorem 1]

Dengan asusmsi Γ adalah subgrup padat dari $\mathbb{R}$ diperoleh bahwa:

(i) Misalkan σ adalah sebuah kosikel tertentu pada Γ. Jika V dan W adalah representasi $\sigma-$isometrik dari Γ^+, maka $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$ isomorfik dengan $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(W)$.
Catatan: Akibat dari teorema ini kita dapat menuliskan $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma$ sebagai aljabar Toeplitz terpelintir yang terkait dengan kosikel σ, karena tidak bergantung lagi pada representasi σ isometrik dari Γ^+.

(ii) Misalkan σ dan τ adalah dua buah kosikel pada grup Γ yang ekivalen, maka $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma$ isomorfik dengan $\mathcal{T}_\Gamma^\tau$.

1.4 Perumusan Masalah

Masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah perumuman dari Teorema Ji [Ji]. Perhatikan bahwa asumsi dari teorema Ji adalah Γ subgrup padat dari $\mathbb{R}$, sehingga jangkauannya sangat terbatas. Pada penelitian ini akan dicoba untuk memperluas menjadi sebarang grup Γ yang abelian terurut total. Dengan diperolehnya perumuman ini, kita mendapatkan sebuah teorema yang analog dengan Teorema Murphy (Teorema 3) untuk versi yang terpelintir.

1.5 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah membuktikan konjektur utama yang muncul dari perumusan masalah, yaitu menelusuri tingkat keuniversalan dari aljabar Toeplitz terpelintir yang terkait dengan grup Γ yang abelian dan terurut total. Secara lebih rinci tujuan penelitian ini adalah :

1. Menelusuri kemungkinan isomorfisma antara $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$ dengan $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(W)$, untuk kasus Γ grup abelian terurut total, dan σ sebuah kosikel (tertentu) pada Γ .

2. Menelusuri kemungkinan isomorfisma antara $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma$ dan $\mathcal{T}_\Gamma^\tau$, dimana $\sigma,\ \tau$ adalah 2 buah kosikel pada Γ.

2 LATAR BELAKANG MASALAH

Usaha-usaha untuk mengklasifikasikan aljabar-C^* telah banyak dilakukan orang. Pada tahun 1943 Gelfand dan Naimark mengklasifikasikan aljabar-C^* yang komutatif sebagai aljabar fungsi $C(X)$ (atau $C_0(X)$) untuk suatu ruang topologi X. Kemudian Gelfand, Naimark dan Seagal telah mengidentifikasi sebarang aljabar-C^* sebagai sub aljabar-C^* dari aljabar operator $B(H)$.

yang yang dibangun
yang dibangun
Pada tahun 1967 Coburn [C] mulai memperkenalkan teori dari aljabar C^* yang dibangun oleh sebuah unsur isometri nonuniter. Aljabar Toeplitz yang klasik adalah model dari teori aljabar-C^* jenis ini. Kemudian Douglas [D] memperumum teori Coburn, dia memperkenalkan teori aljabar-C^* atas semigrup isometri-isometri tetapi semigrupnya khusus, yaitu positive cone dari grup bilangan real. Perluasan selanjutnya dilakukan oleh Murphy [M], teori Douglas diperluas ke positive cone dari sebarang grup abelian dan terurut total. aljabar-C^* yang menjadi model dalam hal ini adalah Aljabar Toeplitz atas grup abelian dan terurut total .

Penelitian demi penelitian banyak dilakukan dalam rangka pengembangan hasil karya Murphy. Raeburn dan Laca [LR] berhasil memperkenalkan teori aljabar Toeplitz atas grup yang tidak abelian dengan konsep urutan tertentu. Arah pengembangan yang lain dari teori Aljabar Toeplitz adalah teori Aljabar Toeplitz terpelintir. Teori inipun sudah banyak dikerjakan. Salah satunya adalah Ji [Ji], dia memperkenalkan teori representasi σ isometrik dari sebuah semigrup dimana σ adalah sebuah kosikel . Ji bekerja khusus pada semigrup bilangan real.

Pada penelitian ini akan dicoba untuk memperumum hasil Ji pada semigrup yang merupakan positive cone dari sebarang grup abelian dan terurut total.
yang dibangun .
dengan satuan, Γ grup abelian

3 RENCANA PENYELESAIAN MASALAH

Strategi yang akan dipakai adalah meniru yang telah dilakukan pada [ALNR] . ALNR membuktikan sifat universal dari aljabar Toeplitz atas sebuah grup abelian terurut total dengan menggunakan teori produk silang. Untuk itu teori ini akan dibahas secara singkat pada sub bab berikut.

3.1 Produk Silang Atas Semigrup Endomorfisma

Pengertian mengenai produk silang atas semigrup Endomorfisma sudah dibahas dengan agak rinci dalam karya yang ditulis oleh S. Adji [A]. Sebuah produk silang aljabar-C^* atas semigrup Endomorfisma selalu berkaitan dengan sebuah sistem dinamik aljabar-C^*. Sistem dinamik aljabar-C^* adalah sistem yang terdiri dari tiga obyek: aljabar-C^* A, positive cone dari grup abelian terurut total, dan aksi α dari positive cone pada A. Secara singkat, produk silang aljabar-C^* adalah aljabar-C^* yang representasinya berkorespondensi (satu-satu) dengan representasi dari sistem dinamiknya. Jadi dari sudut pandang teori representasi, **sistem dinamik** aljabar-C^* dapat dipandang sebagai sebuah aljabar-C^* yang disebut produk silang aljabar-C^*.

Misalkan A adalah sebuah aljabar-C^* dengan unsur satuan, dan Γ adalah grup abelian terurut total. Sebuah aksi α dari semigrup Γ^+ pada A adalah homomorfisma dari semigrup Γ^+ ke semigrup Endomorfisma dari A. Kemudian dinotasikan sistem dinamik sebagai triplet (A, Γ^+, α).

Representasi kovarian dari sistem dinamik adalah pasangan (π, V) dimana π adalah sebuah representasi unital dari aljabar-C^* A , dan V adalah representasi isometri dari Γ^+, sehingga:

$$\pi(\alpha_x(a)) = V_x \pi(a) V_x^*, \text{ untuk setiap } a \in A, x \in \Gamma^+$$

Produk silang atas semigrup endomorfisma dari sistem (A, Γ^+, α), adalah aljabar-C^* unital B bersama-sama dengan $i_A : A \to B$ homomorfisma unital dan i_{Γ^+} homomorfisma dari Γ^+ke semigrup dari isometri di B yang memenuhi ketiga kondisi berikut:

1. $i_A(\alpha_x(a)) = i_{\Gamma^+}(x) i_A(a) i_{\Gamma^+}(x)^*$, untuk setiap $a \in A, x \in \Gamma^+$;
2. untuk setiap representasi kovarian (π, V) dari (A, Γ^+, α) terdapat representasi unital $\pi \times V$ dari B dengan $(\pi \times V) \circ i_A = \pi$ dan $(\pi \times V) \circ i_{\Gamma^+} = V$
3. B dibangun oleh $\{i_A(a)\}$ dan $\{i_{\Gamma^+}(x)\}$.

Untuk selanjutnya produk silang atas semigrup endomorfisma ini akan disebut sebagai produk silang.

Pada bagian ini akan dibahas bagaimana aljabar Toeplitz $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma$ dapat dikenali sebagai produk silang. Teknik umum yang digunakan adalah dengan mengkonstruksi sebuah produk silang yang memiliki sifat keuniversalan yang sama dengan aljabar Toeplitz $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma$. Perhatikan bahwa produk silang memiliki sifat universal terhadap representasi kovarian dari sistem dinamiknya, padahal aljabar Toeplitz $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma$ memiliki sifat universal terhadap representasi isometrik dari Γ^+. Dengan demikian diperlukan produk silang yang sifat universalnya hanya bergantung kepada representasi isometrik dari Γ^+ saja.

Misalkan Γ adalah grup abelian terurut total. Misalkan $x \in \Gamma$, perhatikan fungsi karakteristik berikut ini:

$$1_x(y) = \begin{cases} 1, & jika\ y \in \Gamma^+\ dengan\ y \geq x \\ 0 & jika\ y \in \Gamma^+\ dengan\ y < x \end{cases}$$

Perhatikan bahwa fungsi karakteristik 1_x adalah unsur di aljabar-C^* $l^\infty(\Gamma) := \{f : \Gamma \to \mathbb{C}|$ f terbatas $\}$. Kemudian karena $1_x\ 1_y = 1_{max\{x,y\}}$ maka $\overline{sp}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$ adalah sebuah sub C^* aljabar dari $l^\infty(\Gamma)$. Notasikan $B_{\Gamma^+} = \overline{sp}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$. Pada [ALNR] dibuktikan bahwa aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ adalah produk silang $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$.

Pada [ALNR] pembuktian aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ adalah produk silang $B_{\Gamma^+} \times_\alpha \Gamma^+$ merupakan salah satu akibat dari teorema utama dari [ALNR]. Teorema ini merupakan sebuah inovasi, di mana dua buah obyek yang memiliki sifat universal yang berbeda dapat dikaitkan melalui sebuah isomorfisma. Selanjutnya dalam [ALNR] dibuktikan bahwa Teorema Murphy [M Theorem 2.9] dapat diturunkan sebagai akibat dari teorema utama tersebut [ALNR, Corollary 2.5].

3.2 Produk Silang Terpelintir Atas Semigrup Endomorfisma

Misalkan A adalah sebuah aljabar-C^* dengan unsur satuan. Sebuah sistem dinamik semigrup terpelintir (selanjutnya disebut sistem dinamik terplintir saja) adalah $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$, dimana α adalah sebuah aksi dari semigrup Γ^+ pada A, dan σ adalah kosikel.

Sebuah representasi kovarian dari sistem dinamik dengan kosikel σ adalah pasangan (π, V) dimana π adalah sebuah representasi unital dari aljabar C^* A , dan V adalah representasi σ-isometri, (V_x isometri, dan $V_x V_y = \sigma(x, y) V_{x+y}$) sehingga:

$$\pi(\alpha_x(a)) = V_x \pi(a) V_x^*, \text{ untuk setiap } a \in A, x \in \Gamma^+$$

Serupa dengan sistem dinamik biasa, produk silang terpelintir atas semigrup endomorfisma dari sistem dinamik $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ adalah aljabar-C^* unital B bersama-sama dengan homomorfisma unital $i_A : A \to B$ dan σ-homomorfisma i_{Γ^+} dari Γ^+ ke semigrup dari isometri di B (pemetaan dengan sifat $i_{\Gamma^+}(x) i_{\Gamma^+}(y) = \sigma(x, y) i_{\Gamma^+}(x + y)$ untuk setiap $x, y \in \Gamma^+$) yang memenuhi ketiga sifat seperti pada produk silang biasa . Untuk selanjutnya produk silang terpelintir atas semigrup endomorfisma disebut sebagai produk silang terpelintir saja, dan notasi dari produk silang ini adalah $A \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+$. Sama halnya dengan produk silang biasa, eksistensi dari produk silang terpelintir sangat bergantung kepada eksistensi representasi kovarian sistem dinamik terpelintir $(A, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$. Dalam kasus yang khusus, bila kita menggunakan kosikel $\sigma(x, y) = 1$, untuk setiap x, y di Γ, maka kita peroleh sistem dinamik (A, Γ^+, α) dan produk silang biasa $A \times_\alpha \Gamma^+$ seperti ditulis dalam [ALNR].

3.3 Aljabar Toeplitz Terpelintir sebagai Produk Silang Terpelintir

Misalkan σ adalah sebuah kosikel, dan misalkan V adalah sebuah representasi σ-isometrik dari Γ^+ pada suatu ruang Hilbert H. Perhatikan aljabar Toeplitz terpelintir $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$, seperti telah dikemukakan pada Pendahuluan bahwa kita akan mengkaji apakah $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$ isomorfik dengan produk silang tertentu. Untuk itu diperlukan sebuah produk silang terpelintir yang universal terhadap representasi σ isometrikk dari Γ^+.

Berdasarkan ulasan dari [ALNR], adalah sangat alamiah untuk memeriksa produk silang terplintir $B_{\Gamma^+} \times_{\sigma,\alpha} \Gamma^+$ dari suatu kosikel σ di Γ. Jadi program penelitian ini akan difokuskan untuk mempelajari produk silang khusus, yaitu $B_{\Gamma^+} \times_{\sigma,\alpha} \Gamma^+$ dan membuktikan produk silang tersebut isomorfik dengan aljabar Toeplitz terpelintir $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$.

Karena produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\sigma,\alpha} \Gamma^+$ adalah universal terhadap representasi σ-isometrik dari Γ^+, maka kita bisa mendapatkan pengaitan yang bersifat isomorfisma, sehingga diperoleh

$$B_{\Gamma^+} \times_{\sigma,\alpha} \Gamma^+ \cong \mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V).$$

Dengan diperolehnya isomorfima ini kita dapat memandang aljabar Toeplitz terpelintir sebagai produk silang terpelintir.

Selanjutnya karena produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\sigma,\alpha} \Gamma^+$ adalah universal terhadap representasi σ-isometrikk dari Γ^+, maka sifat universal dari $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$, seperti halnya pada [ALNR] dapat diturunkan setelah kita mengenali aljabar Toeplitz terpelintir sebagai produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\sigma,\alpha} \Gamma^+$. Akibatnya kita cukup menotasikan aljabar Toeplitz terpelintir sebagai $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma$, karena tidak bergantung kepada representasi σ-isometrik dari Γ^+. Dengan demikian kita telah memperumum teorema Ji bagian pertama untuk grup yang lebih umum yaitu Γ grup abelian terurut total, dan memperumum teorema Murphy [M] untuk suatu kosikel σ di Γ.

Selanjutnya misalkan $\sigma_2 \in [\sigma]$ adalah kosikel lain tetapi ekivalen dengan σ. Pada penelitian ini akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{T}_\Gamma^{\sigma_1} \cong B_{\Gamma^+} \times_{\sigma,\alpha} \Gamma^+$. Dengan diperolehnya isomorfisma ini kita simpulkan bahwa $\mathcal{T}_\Gamma^{\sigma_1} \cong \mathcal{T}_\Gamma^\sigma$. Sehingga aljabar Toeplitz terpelintir tidak bergantung kepada pemilihan kosikel-kosikel σ (asalkan terletak pada kelas yang sama). Dengan demikian kita telah memperoleh perumuman dari teorema Ji bagian kedua untuk grup yang lebih umum (sebarang grup abelian terurut total).

Berdasarkan uraian di atas dan uraian pada bagian Latar Belakang Masalah, maka untuk mencapai tujuan penelitian akan diambil langkah-langkah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi aljabar B_{Γ^+}
2. Memeriksa apakah sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha, \sigma)$ memiliki representasi kovarian. Eksistensi ini menjamin eksistensi produk silang terplintir $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+$
3. Memeriksa sifat universal dari produk silang terpelintir $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+$
4. Mengkonstruksi pemetaan dari $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha,\sigma} \Gamma^+$ ke $\mathcal{T}_\Gamma^\sigma(V)$ yang bersifat isomorfisma*.
5. Membuktikan bahwa untuk sebuah kosikel σ, aljabar Toeplitz terpelintir adalah universal terhadap representasi σ-isometrik dari Γ^+.
6. Membuktikan bahwa aljabar Toeplitz terpelintir tidak bergantung kepada pemilihan kosikel-kosikel σ, asalkan mereka terletak pada kelas yang sama.

4 JADWAL KEGIATAN

Penelitian ini direncanakan dapat diselesaikan dalam waktu 24 bulan, termasuk penulisan draf disertasi. Kegiatan ini akan dimulai pada 1 September 1999 dan diharapkan selesai pada 31 Agustus 2001. Beberapa kegiatan dilaksanakan secara paralel, karena kegiatan satu berkaitan dengan kegiatan lainnya.

Adapun prakiraan rincian jadwal penelitian ini adalah sebagai berikut .

Tahun pertama

Jenis Kegiatan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1.Langkah 1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2. Langkah 2	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
3. Langkah 3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
4. Langkah 4												x

Tahun Kedua

Jenis Kegiatan	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1. Langkah 4	x	x										
2. Langkah 5			x									
3. Langkah 6				x								
4. Penulisan draft					x	x	x	x	x	x	x	x

5 PUSTAKA

[ALNR] Sriwulan Adji, Marcelo Laca, May Nielsen, and Iain Raeburn, *Crossed Products by Semigroups of Endomorphisms and The Toeplitz Algebras of Ordered Groups*,Proc. of the Amer. Math. Soc., Vol. 122, Number 4 (1994), hal 1133-1141

[C] L. A. Coburn, *The C^* Algebra Generated by an Isometry I*, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1972), hal 722-726

[CON] John. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York (1990)

[D]R.G Douglas, *On the C^* Algebra of One Parameter Semigroup of isometrikes*, Acta. Math. 128 (1972), hal. 143-152.

[Ji] Ronghui ji, *Toeplitz Operators on Noncommutative Tori and Their Real Valued Index*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics Vol. 51 Part 2 (1990)

[M]G.J. Murphy, *Ordered Groups and Toeplitz Algebras*, J. Operator Theory 18 (1987), hal. 303-326

[R] Iain. Raeburn, *On Crossed Products and Takai Duality*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 31 (1988), hal. 321-330

USULAN PENELITIAN DISERTASI

PRODUK SILANG TERPELINTIR ATAS SEMIGRUP DARI ENDOMORFISMA DAN ALJABAR TOEPLITZ TERPELINTIR ATAS GRUP TERURUT

Oleh
Rizky Rosjanuardi
NIM 31198013

Tim Pembimbing
Prof. Dr. Moedomo
Dr. Sriwulan Adji
Dr. Oki Neswan

PROGRAM PASCASARJANA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
1999

DAFTAR ISTILAH

1. Isometri di ruang Hilbert.

Misalkan H adalah sebuah ruang vektor yang dilengkapi hasil kali dalam $(.|.)$. Didefinisikan norm pada H sebagai $\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$. Bila ruang vektor bernorm $(B, \|.\|)$ lengkap, maka H disebut **ruang *Hilbert***

Operator linier $T : H \longrightarrow H$ disebut ***isometri*** jika memenuhi $\|T(x)\| = \|x\|$ untuk semua $x \in H$. Isometri T disebut ***uniter*** jika $T(H) = H$ dan T disebut ***isometri non uniter*** jika $T(H) \neq H$. Didefinisikan $Isom(H) := \{T \in B(H) : T \text{ isometri }\}$. Kemudian operator T disebut ***terbatas*** jika terdapat konstanta c di $\mathbb{R}$ sehingga berlaku $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ untuk setiap x di H.

2. Aljabar

Misalkan A adalah sebuah ruang vektor atas $\mathbb{C}$, bila A dilengkapi operasi kali dan untuk setiap $a,\ b,\ c$ di A, dan α di $\mathbb{C}$ berlaku :

$$(ab)\, c \;=\; a\, (bc)$$

$$(\alpha a)\, b = \alpha(ab) = a(\alpha b)$$

$$(a + b)\, c = a\, c + b\, c \text{ dan } c(a + b) \;=\; ca + cb$$

A disebut ***aljabar*** atas $\mathbb{C}$. Sebuah unsur ***satuan*** (identitas terhadap operasi kali) dari aljabar A adalah unsur **1** di A sehingga berlaku $1\ a \;=\; a\ 1 \;=\; a$ untuk setiap a di A.

Misalkan A dan B adalah aljabar. Pemetaan $\phi : A \longrightarrow B$ disebut ***homomorfisma*** (aljabar) bila ϕ adalah linier dan memenuhi $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ untuk semua $x,\ y$ di A. Bila A dengan operasi $+$ dan B dengan operasi * adalah grup atau semigrup, maka ϕ disebut ***homomorfisma*** (grup) bila memenuhi $\phi(x + y) = \phi(x) * \phi(y)$ untuk setiap $x,\ y$ di A.

Involusi pada A adalah pemetaan $a \mapsto a^*$ dari A ke A yang memenuhi :

(i) $(\lambda a + \mu b)^* = \bar{\lambda} a^* + \bar{\mu} b^*$

(ii) $(ab)^* = b^* a^*$

(iii) $(a^*)^* = a$

untuk setiap $a, b \in A$ dan $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Unsur $a \in A$ disebut **self-*adjoint*** bila memenuhi $a = a^*$.

Misalkan A adalah aljabar-C^* dengan satuan, unsur a di A disebut ***isometri*** jika memenuhi $a^*a = 1$. Selanjutnya unsur $a \in A$ disebut ***uniter*** bila $a^*a = aa^* = 1$.

3.Urutan pada Suatu Himpunan

Misalkan P sebuah himpunan. **Urutan parsial** di P adalah relasi $\leq$ yang memenuhi :

(i) $x \leq x$ (refleksif)

(ii) $x \leq y$ dan $y \leq x$ mengakibatkan $x = y$ (antisimetri)

(iii) $x \leq y$ dan $y \leq z$ mengakibatkan $x \leq z$ (transitif)

Dalam hal ini P disebut ***terurut*** **parsial**. Selanjutnya bila relasi $\leq$ diatas juga memenuhi :

(iv) $x, y \in P$ mengakibatkan $x \leq y$ atau $y \leq x$ (trikotomi).

maka $\leq$ disebut **urutan total**, dan P disebut ***terurut*** **total**.

PERSETUJUAN PEMBIMBING

Judul Penelitian	:	Produk Silang Terpelintir
Atas Semigrup dari Endomorfisma		
dan Aljabar Toeplitz Terpelintir atas Grup Terurut		
Nama Mahasiswa	:	Rizky Rosjanuardi
NIM	:	31198013

Telah disetujui oleh Tim Pembimbing Program Doktor Tahap I,

Pada tanggal : ....

Ketua,

(Prof. DR. Moedomo)

Anggota,

(DR. Sriwulan Adji)

Anggota,

(DR. Oki Neswan)