

# Aljabar $C^*$ dan Mekanika Kuantum<sup>1</sup>

Oleh:

Rizky Rosjanuardi

rizky@upi.edu

Jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia

## Abstrak

Pada makalah ini dibahas konsep aljabar- $C^*$  dan kaitannya dengan masalah mekanika kuantum. Dinamik dari sistem mekanika kuantum yang diformulasikan sebagai masalah operator pada ruang Hilbert, selanjutnya dapat dipandang sebagai sebuah sistem dari aljabar- $C^*$ .

## 1. Pendahuluan

Pertanyaan seperti "mengapa kita mempelajari aljabar- $C^*$ ?", "untuk apa kita mempelajari struktur aljabar- $C^*$ ?", "apakah struktur aljabar Banach saja tidak cukup?" sering penulis terima. Pertanyaan-pertanyaan tadi memotivasi penulis untuk menyusun makalah ini.

Aljabar- $C^*$  adalah sebuah struktur aljabar yang sangat penting dalam bidang analisis fungsional. Struktur ini mendasari kajian-kajian pada analisis fungsional dan aljabar operator moderen. Struktur ini menggantikan peran aljabar Banach sebagai dasar dari kajian analisis fungsional dan aljabar operator klasik. Sebuah aljabar- $C^*$  didefinisikan secara konkrit sebagai aljabar  $B(H)$  (atas lapangan kompleks  $\mathbb{C}$ ) dari operator-operator linier terbatas pada sebuah ruang Hilbert  $H$  dengan dua sifat tambahan berikut:

- $B(H)$  adalah sebuah himpunan yang tertutup pada topologi yang dibangun oleh norm dari operator ,
- $B(H)$  tertutup terhadap ajoin dari operator.

Pada awal perkembangannya, konsep aljabar- $C^*$  digunakan dalam masalah mekanika kuantum untuk memodelkan aljabar dari observabel. John von Neumann berusaha mengembangkan kerangka umum dari aljabar ini yang bermuara kepada kumpulan paper tentang gelanggang dari operator. Sekitar tahun 1943, penelitian dari

---

<sup>1</sup>Penelitian ini dibiayai oleh Penelitian Hibah Kompetitif UPI 2006 no. Kontrak 102/J.33.8/PL.00.14/2006

Gelfand, Naimark dan Seagal menghasilkan konsep abstrak dari aljabar-C\*, yang sama sekali terlepas dari konsep operator.

Pada makalah ini akan dibahas konsep aljabar-C\* abstrak, tinjauan konsep mekanika kuantum dari sisi matematika dan kaitan diantara keduanya.

## 2. Aljabar-C\* Abstrak

Sekarang kita akan membahas konsep aljabar-C\* secara abstrak dan kaitannya dengan aljabar Banach. Misalkan  $A$  adalah sebuah aljabar bernorm  $\| \cdot \|$  atas lapangan kompleks  $\mathbb{C}$ . Apabila  $A$  adalah lengkap terhadap norm  $\| \cdot \|$  dan memenuhi  $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$  untuk semua  $a, b$  di  $A$ , maka  $A$  disebut aljabar Banach. Involusi pada  $A$  adalah pemetaan  $a \mapsto a^*$  dari  $A$  ke  $A$ , sehingga bila  $a, b$  di  $A$ , dan  $\alpha$  di  $\mathbb{C}$  berlaku :

- $(a^*)^* = a$ ,
- $(ab)^* = b^* a^*$ ,
- $(\alpha a + b)^* = \overline{\alpha} a^* + b^*$ .

Bila aljabar Banach  $A$  dilengkapi dengan involusi,  $A$  disebut aljabar Banach\*. Bila untuk setiap  $a$  di  $A$  berlaku  $\|a^* a\| = \|a\|^2$ , maka  $A$  disebut sebuah aljabar-C\* (abstrak).

Perhatikan bahwa sebuah aljabar-C\* adalah sebuah aljabar Banach dengan syarat-syarat tambahan. Adanya kekhususan ini membuat aljabar-C\* memiliki banyak sifat yang secara teknis sangat menguntungkan. Sifat-sifat ini diturunkan melalui konsep fungsional kalkulus, atau melalui reduksi terhadap aljabar-C\* komutatif. Sebuah teorema yang sangat fundamental dari Gelfand dan Naimark menyatakan bahwa setiap aljabar-C\* komutatif adalah isomorfik dengan suatu aljabar dari fungsi kontinu  $C(X)$  pada himpunan kompak  $X$ . Berikut ini adalah beberapa sifat penting dari aljabar-C\* yang tidak dimiliki oleh aljabar Banach:

- setiap homomorfisma- $*$  antara aljabar-C\* adalah terbatas, lebih jauh memiliki norm yang kurang atau sama dengan 1,
- norm dari aljabar-C\* adalah tunggal,
- setiap aljabar-C\* memiliki identitas pendekatan (approximate identity) artinya setiap aljabar-C\* dapat dipandang sebagai aljabar-C\* dengan unsur satuan.

Penurunan dari sifat-sifat di atas dapat dijumpai pada buku-buku teks analisis fungsional lanjut atau aljabar operator. Adanya sifat dari aljabar-C\* yang tidak dimiliki oleh aljabar Banach umum membuktikan bahwa struktur dari aljabar-C\* adalah lebih kaya daripada aljabar Banach umum.

Kita masih dapat melihat kaitan antara aljabar-C\* konkrit dan aljabar-C\* abstrak melalui representasi dari aljabar-C\*. Sebuah representasi  $\pi$  dari aljabar-C\*  $A$  pada sebuah ruang Hilbert  $H$  adalah homomorfisma  $\pi : A \rightarrow B(H)$ . Representasi  $\pi$  disebut

nondegenerate bila  $\text{span } \pi(a)h : a \in A, h \in H$  adalah padat di  $H$ . Perhatikan bahwa  $\pi(A)$  adalah subaljabar- $*$  dari  $B(H)$  dan tertutup, akibatnya  $\pi(A)$  adalah subaljabar- $C^*$  dari  $B(H)$ . Oleh karenanya, kita akan dapat mengenali  $A$  sebagai bagian dari aljabar- $C^*$  konkret  $B(H)$ . Lebih dari itu, kita dapat membuat  $\pi(A)$  isomorfik dengan sebuah subaljabar- $C^*$  dari  $B(H)$  dengan jalan memilih representasi yang injektif. Eksistensi dari representasi (injektif) sebuah aljabar- $C^*$  dijamin oleh teorema berikut.

**Teorema 1 (Gelfand-Naimark-Seagal)**

*Misalkan  $A$  adalah aljabar- $C^*$  maka akan terdapat sebuah ruang Hilbert  $H$  dan representasi  $\pi : A \rightarrow B(H)$  sedemikian sehingga  $\pi$  nondegenerate dan injektif.*

### 3. Mekanika Kuantum

Mekanika kuantum adalah sebuah teori yang mengoreksi teori mekanika Newton klasik yang gagal dalam menjelaskan fenomena mekanik pada skala atomik dan subatomik. Teori ini menggantikan konsep deterministik klasik oleh konsep indeterministik, karena adanya interpretasi probabilistik pada struktur atomik dan subatomik.

Perbedaan antara mekanika klasik dan mekanika kuantum adalah terletak pada deskripsi sistem fisik. Dalam mekanika klasik, setiap posisi dan momentum setiap saat dari semua partikel dapat ditentukan secara tepat melalui persamaan gerak. Sementara itu, deskripsi kuantum ditentukan oleh persamaan gelombang yang memberikan prediksi secara statistik untuk besaran-besaran yang terukur pada sistem.

Teori mekanika kuantum moderen pertama kali dikembangkan oleh Erwin Schrodinger pada akhir tahun 1924 dan Werner Heisenberg pada awal 1925. Scrodinger mengembangkan konsep mekanika gelombang, sedangkan Heisenberg secara terpisah mengembangkan konsep mekanika matriks. Schrodinger telah membuktikan bahwa kedua metode ini secara fisika adalah ekuivalen, karena mereka menghasilkan probabilitas yang sama untuk observabel  $A$  pada state  $\varphi$ .

Seluruh sifat yang terukur seperti energi, posisi dan momentum disebut observabel. Dalam mekanika kuantum, tidak ada nilai yang pasti untuk observabel, sebagai gantinya digunakan konsep distribusi peluang, yaitu peluang memperoleh setiap hasil dari pengukuran sebuah observabel. Hasil pengukuran ini akan bergantung kepada keadaan kuantum pada saat dilakukan pengukuran.

Sebuah keadaan (state) kuantum dinyatakan sebagai fungsi gelombang (kompleks)  $\Psi$  dari posisi dan waktu. Berbeda dengan mekanika klasik seperti gelombang panas, gelombang bunyi atau gelombang air, fungsi gelombang ini tidak memiliki interpretasi fisika secara langsung. Fungsi ini berkaitan dengan peluang untuk menemukan sebuah partikel pada saat tertentu dan posisi tertentu, misalnya untuk posisi  $x$  dan waktu  $t$ , ekspresi

$$\Psi(x,t)\overline{\Psi(x,t)} \quad (1)$$

adalah peluang untuk menemukan sebuah partikel pada posisi  $x$  dan waktu  $t$ .

Untuk setiap waktu  $t$ , partikel harus berada pada lokasi tertentu pada daerah  $R$ , dengan demikian peluang untuk menemukan partikel pada suatu tempat pada setiap waktu  $t$  haruslah bernilai 1. Jadi fungsi gelombang haruslah dinormalisasi, yaitu jumlah peluang diseluruh tempat  $R$  pada setiap waktu  $t$  haruslah bernilai 1. Hal ini tidak lain adalah

$$\int_R \Psi(x,t)\overline{\Psi(x,t)}dx = 1$$

untuk setiap waktu  $t$ .

Lokasi  $x$  dari sebuah partikel adalah besaran yang teramati, dengan demikian merupakan sebuah observabel. Ekspektasinya diberikan oleh

$$E_\Psi(x) = \int_R x\Psi(x,t)\overline{\Psi(x,t)}dx. \quad (2)$$

Persamaan (1) menginspirasi kita untuk meninjau ruang Hilbert kompleks  $L^2$ , karena

$$\int_R \Psi(x,t)\overline{\Psi(x,t)}dx$$

tidak lain adalah hasil kali dalam  $\langle \Psi | \Psi \rangle$  (untuk setiap waktu  $t$ ). Jika posisi  $x$  diasumsikan berada pada  $\mathbb{R}^3$ , maka ruang Hilbert yang terkait adalah  $L^2(\mathbb{R}^3)$ .

Secara umum, untuk mengkonstruksi sebuah sistem mekanika kuantum, kita memerlukan sebuah ruang Hilbert, sebut  $H$ , biasanya ruang Hilbert ini disebut ruang konfigurasi, atau ruang keadaan, atau ruang fasa. Von Neumann dalam [1] menunjukkan bahwa terdapat korespondensi satu-satu antara vektor di  $H$  dan keadaan fisik. Keadaan yang mungkin pada sistem diberikan oleh vektor satuan  $\varphi$  di  $H$ , dan untuk setiap skalar kompleks  $c$  di  $\mathbb{C}$ ,  $\varphi$  dan  $c\varphi$  adalah keadaan-keadaan yang ekuivalen.

Sekarang kita akan membahas dinamik dari keadaan dan observabel, yaitu perubahan dari keadaan dan observabel seiring dengan perubahan waktu. Untuk setiap keadaan awal  $\varphi_0$  dari sistem, akan diperoleh secara tunggal keadaan  $\varphi_t$  untuk waktu  $t$ , dengan demikian dapat kita tulis

$$\varphi_t = U(t)\varphi_0. \quad (3)$$

Percobaan secara fisika menyatakan bahwa keadaan memenuhi sifat superposisi, dengan demikian  $U(t)$  haruslah merupakan sebuah operator linier pada  $H$ , lebih jauh operator  $U(t)$  adalah uniter. Persamaan (3) mengakibatkan  $U(0)$  adalah operator identitas, dan

$$U(t+s) = U(t) \circ U(s),$$

akibatnya invers dari  $U(t)$  diberikan oleh  $U(-t)$ . Dapat ditunjukkan bahwa keluarga dari operator-operator  $U(t)$  membentuk sebuah grup yang biasa disebut grup uniter satu parameter, dengan kata lain pemetaan

$$t \mapsto U(t)$$

memberikan sebuah homomorfisma dari grup aditif  $\mathbb{R}$  ke grup operator uniter  $U(t): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} | t \in \mathbb{R}$ . Pemetaan ini biasa disebut representasi uniter dari  $\mathbb{R}$  pada  $\mathcal{H}$ . Untuk ringkasnya, kita peroleh aksioma standar dari mekanika kuantum berikut:

**Aksioma 2 (Dinamik dari Keadaan).** *Dinamik dari keadaan diberikan oleh sebuah grup uniter satu parameter  $U(t): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} | t \in \mathbb{R}$ . Jika  $\varphi_0$  menyatakan keadaan awal, maka keadaan pada waktu  $t$  diberikan oleh  $\varphi_t = U(t)\varphi_0$ .*

Sebuah teorema dari Stone [5, Theorem 5.2] menyatakan bahwa setiap representasi uniter dari  $\mathbb{R}$  adalah berbentuk  $e^{-itH}$  untuk suatu operator ajoin dengan diri sendiri (self adjoint)  $H$ . Operator  $H$  disebut generator infinitesimal dari  $U$ , dan diberikan oleh

$$H\varphi := i \frac{d}{dt} (U(t)\varphi) |_{t=0} = i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{U(t)\varphi - \varphi}{t}.$$

Operator  $H$  disebut Hamiltonian. Secara fisika, operator ini adalah jumlah dari energi kinetik dan energi potensial dari sistem, dengan demikian merupakan fungsi dari posisi dan momentum.

Selain menentukan energi dari sistem, operator Hamiltonian menggambarkan evolusi waktu dari solusi persamaan gelombang:

$$H\varphi = i \frac{d}{dt} \varphi.$$

Persamaan gelombang ini dikenal sebagai persamaan Schrodinger. Jika  $\varphi_0 \in \text{Dom}(H)$ , maka  $\varphi_t$  akan merupakan sebuah solusi dari persamaan. Mengambarkan evolusi waktu dari solusi persamaan Schrodinger dikenal sebagai metoda Schrodinger, pada metoda ini keadaan dianggap bergerak, sedangkan observabel dianggap tetap.

Cara lain untuk menggambarkan evolusi waktu adalah dengan memfokuskan pada observabel. Kebalikan dengan metoda Schrodinger, pada metoda ini observabel dianggap bergerak dan keadaan dianggap tetap. Metoda ini dikenal sebagai metoda Heisenberg.

Misalkan  $A$  adalah sebuah observabel dari sistem kuantum, dan keadaan dianggap tetap dan diberikan oleh  $\varphi_0$ . Evolusi waktu dari observabel  $A$  diberikan oleh

$$A_t = U(t)^* A U(t), \tag{4}$$

dimana  $U(t): t \in \mathbb{R}$  adalah grup satu parameter dari operator uniter. Von Neumann dalam [1] pada tahun 1931 membuktikan bahwa observabel berkorespondensi dengan operator yang ajoin dengan diri sendiri, dengan demikian  $A$  adalah operator yang ajoin dengan diri sendiri. Akibatnya untuk setiap waktu  $t$ , operator  $A_t$  merupakan sebuah operator yang ajoin dengan diri sendiri.

## 4. Mekanika Kuantum Sebagai Masalah Aljabar-C\*

Kita telah melihat bahwa dinamik dari sistem mekanika kuantum diberikan oleh operator  $H$  yang ajoin dengan diri sendiri pada sebuah ruang Hilbert  $H$  melalui salah satu algoritma berikut:

- $\varphi \mapsto \varphi_t = U(t)\varphi$  (metoda Schrodinger), atau
- $A \mapsto A_t = U(t)^*AU(t)$  (metoda Heisenberg).

Ruang Hilbert yang terkait dengan sebuah partikel di  $\mathbb{R}^3$  diberikan oleh  $L^2(\mathbb{R}^3)$ . Secara umum, ruang Hilbert untuk  $N$  buah partikel diberikan oleh  $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ . Ketika kita membahas sejumlah tak berhingga partikel, tidak ada ruang Hilbert yang mudah untuk digunakan. Dengan demikian untuk masalah seperti ini, pemakaian metoda ruang Hilbert seperti pada pasal sebelumnya tidak lagi efektif. Untuk menangani masalah ini kita harus menggunakan metoda lain. Usaha untuk memperumum metoda Schrodinger terbentur dengan masalah teori representasi, dengan demikian usaha pengembangan lebih terfokus pada metoda Heisenberg. Pada metoda ini digunakan konsep aljabar-C\* dan unsur-unsur yang ajoin dengan diri sendiri dipandang sebagai observabel dari sistem. Bahasan lebih mendalam mengenai ini dapat diperoleh dalam [2] dan [4].

Evolusi waktu dari sistem kuantum berikut diberikan oleh Iain Raeburn [4] sebagai berikut.

**Aksioma 3.** Evolusi waktu dari sistem kuantum yang observabelnya diberikan oleh unsur-unsur yang ajoin dengan diri sendiri dari sebuah aljabar-C\* diberikan oleh homomorfisma  $\alpha$  dari grup aditif  $\mathbb{R}$  ke grup  $Auto(A)$  yang terdiri dari automorfisma-automorfisma pada  $A$ . Observabel direpresentasikan oleh unsur yang  $a = a^* \in A$  yang ajoin dengan diri sendiri, pada saat  $t=0$  bergerak menjadi observabel  $\alpha_t(a)$  pada saat  $t$ .

Komponen utama yang terkait pada definisi di atas adalah aljabar-C\*  $A$ , homomorfisma  $\alpha$  dan grup  $\mathbb{R}$ . Tripel  $(A, \alpha, \mathbb{R})$  disebut sistem dinamik aljabar-C\*. Dengan demikian sebuah sistem mekanika kuantum dinyatakan sebagai sistem dinamik aljabar-C\*.

Representasi Gelfand-Naimark-Seagal memungkinkan kita untuk memandang sistem mekanika kuantum aljabar-C\* sebagai operator-operator di suatu ruang Hilbert  $H$ . Setiap unsur yang ajoin dengan diri sendiri akan dipandang sebagai operator yang ajoin dengan diri sendiri juga, karena representasi dari aljabar-C\* mengawetkan ajoin.

Melalui Aksioma 3, sebuah observabel  $a$  bergerak menjadi observabel  $\alpha_t(a)$  pada saat  $t$ , dilain pihak berdasarkan persamaan (4) sebuah observabel  $\pi(a)$  bergerak menjadi observabel  $U(t)^*\pi(a)U(t)$  pada saat  $t$ . Dengan demikian kita peroleh persamaan

$$\pi(\alpha_t(a)) = U(t)^*\pi(a)U(t) \quad (5)$$

yang berlaku untuk setiap observabel  $a$  di  $A$  dan setiap waktu  $t$  di  $\mathbb{R}$ . Hal ini menyatakan bahwa evolusi waktu yang digambarkan oleh aksi  $\alpha$  pada model aljabar-C\* dan operator uniter  $U$  pada model ruang Hilbert adalah sama. Persamaan (5) dalam teori sistem dinamik dari aljabar-C\* biasa disebut sifat kovarian dari representasi  $\pi$  dari aljabar-C\*  $A$  dan representasi uniter  $U$  dari grup  $\mathbb{R}$ .

## Daftar Pustaka

- [1] A. Bohm, H. Kaldass dan P. Patuleanu, *Hilbert Space or Gelfand Triplet-Time Symmetric or Time Asymmetric Quantum Mechanics*, preprint, Dept. of Physics, The Univ. of Texas at Austin USA (2005).
- [2] O. Bratteli dan D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*, Springer-Verlag, New York (2002).
- [3] R. Madrid, *On the Connection Between the Schrodinger and the Heisenberg Pictures for Unbounded Operators*, preprint, Departamento de Fisica Teorica, Univ. del Pais Vasco, Spain (2005).
- [4] I. Raeburn, *Dynamical Systems and Operator Algebras*, preprint, Department of Mathematics the Univ. of Newcastle, Australia (1999).
- [5] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics with Application to Schrodinger Operators*, Fakultat fur Mathematik, Wien, Austria (2006).