KERANGKA KERJA TEORITIS PEMBUKTIAN MATEMATIKA UNTUK MAHASISWA S1

Oleh:

Kusnandi
Kus_nandi@upi.edu.
FPMIPA Uiversitas Pendidikan Indonesia

ABSTRACT

Competence of proving insists student on analyzing and elaborating premises and conclusion, and also he should make connection between both. Kusnandi (2008) had developed learning model by abductive-deductive strategy to promoting reading and proving ability for the first year students in university. Based on theoretical research on structure of proof, the strategy with little extension also can be applied effectively on advanced subject such as analysis real and algebra abstract with the more operational problems. The extension strategy can be identified to be two kinds, namely knowledge of initial strategy and existential of key concept. The first one contain the knowledge of an indirect proof, a construction proof, and how to prove the conclusion that contain the quantifier "for every", statement "*p* or *q*", and the others. The initial strategy is very important as the first step in proving. Without this, it is very difficult to prove the conclusion. The second one often is met when we construct the existential an object. It is rather difficult to find ideas of the key concept. Only student who studies much in proving can appear the key concept.

Key words: framework, abductive-deductive strategy, mathematics proof, real analysis, agebra abstract

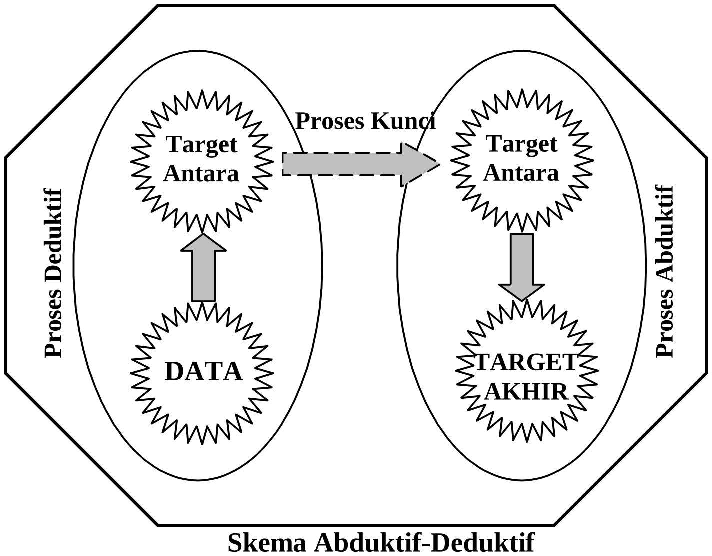
PENDAHULUAN

Mengembangkan program pendidikan matematika yang berfokus pada peningkatan kemampuan berpikir matematik merupakan suatu keharusan untuk menghadapi berbagai tantangan dan persaingan di era globalisasi ini. Kemampuan berpikir matematik ini bertahap mulai tahapan paling rendah berupa tahap reproduksi hingga tahapan yang lebih tinggi berupa berpikir koneksi dan analisis. Kemampuan membuktikan secara matematik menuntut mahasiswa menganalisis dan mengelaborasi fakta-fakta yang diberikan, baik fakta di dalam premis, maupun fakta di dalam konklusi. Selain itu, mahasiswa juga dituntut untuk dapat membuat suatu koneksi antara kedua fakta tersebut.

Kurikulum Jurusan Pendidikan Matematika telah menyajikan berbagai bidang kajian matematika yang tersebar pada kelompok bidang kajian analisis, aljabar, statistika dan komputasi dengan tuntutan kemampuan berpikir matematik yang berbeda-beda. Pengembangan pokok-pokok kajian pada mata kuliah bidang analisis dan aljabar memiliki kekhasan yang relatif tidak berbeda. Pembahasan pokok kajian itu diawali dengan mendefinisikan suatu objek. Sifat-sifat (teorema) dari objek yang didefinisikan diturunkan dari definisi berdasarkan aturan yang telah diketahui sebelumnya dan atau melalui *lemma* yang harus diketahui terlebih dahulu. Hal-hal yang khusus dari objek dalam teorema dapat diidentifikasi dan menghasilkan suatu *corollary*

Bukti dari suatu lemma, teorema, dan corollary yang disajikan dalam buku teks dikembangkan secara deduktif dari premis menuju konklusi yang seringkali tidak mudah untuk dapat memahaminya secara komprehensif, terlebih lagi bagi mahasiswa pemula dalam belajar membuktikan. Kesulitan mahasiswa dalam membuktikan merupakan suatu gejala umum yang ditemui, baik di dalam negeri (Sabri, 2003, Juandi, 2006, Arnawa, 2006) maupun di luar negeri (Moore,1994, Tucker, 1999, dan Weber, 2002).

Kusnandi (2008) telah mengembangkan suatu pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif (PSAD) untuk dapat menumbuhkembangkan kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan pada mahasiswa pemula belajar bukti dengan kerangka kerja disajikan pada Gambar 1. Model kerangka kerja strategi abduktif-deduktif ini sangat efektif untuk menumbuhkembangkan kemampuan membuktikan pada mahasiswa pemula belajar bukti, dengan masalah pembuktian terbatas pada bentuk implikasi, $p \Rightarrow q$ pada mata kuliah yang materinya belum seabstrak seperti pada mata kuliah dalam kelompok aljabar atau analisis lainnya. Dari bentuk ini mahasiswa dituntut untuk mengelaborasi data p dan target akhir q dengan proses seperti pada skema abduktif-deduktif di atas.



Gambar 1 Model Kerangka Kerja Strategi Abduktif-Deduktif

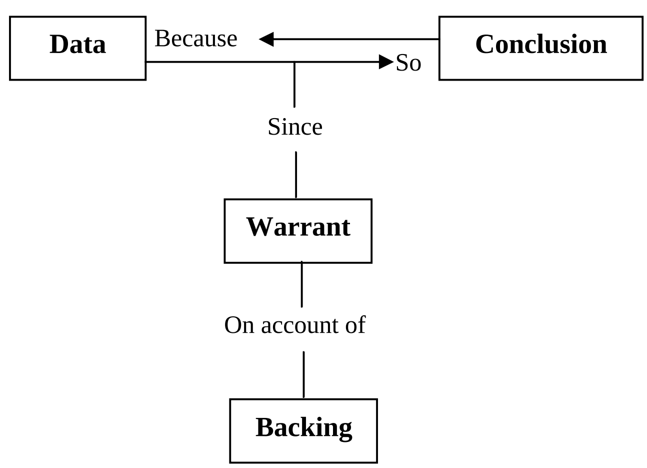
Untuk mata kuliah – mata kuliah yang lebih abstrak, masalah pembuktian bukan hanya bentuk implikasi $p \Rightarrow q$, tetapi juga bentuk lainnya dengan tingkat kesulitan bisa lebih tinggi dari sebelumnya. Bentuk masalah pembuktian itu di antaranya: masalah menunjukkan keberadaan suatu objek, pembuktian dengan kontradiksi, pembuktian dengan kontrapositif, dan yang lainnya.

Berdasarkan uraian di atas, dipandang perlu untuk memperluas efektifitas strategi abduktif-deduktif pada masalah pembuktian lainnya dalam mata kuliah-mata kuliah dengan topik kajian yang lebih abstrak. Sehingga hasilnya diharapkan tersusunnya kerangka kerja proses pembuktian matematika secara umum, yang dapat memudahkan dosen matematika dalam mengimplementasikannya di lapangan.

STRATEGI ABDUKTIF DEDUKTIF

Toulmin (dalam Pedemonte, 2003) mengajukan skema yang menggambarkan struktur suatu argumentasi. Langkah pertama dalam setiap argumentasi menurut Toulmin adalah menyatakan suatu pendirian (*standpoint*) berupa pendapat atau pernyataan. Dalam istilah Toulmin, pendapat ini diberi nama *claim*. Selanjutnya, *claim* yang diajukan harus didukung oleh *data* di mana hubungan antara data dengan *claim* dijastifikasi atau dijembatani oleh suatu aturan (*warrant*). *Data* – *warrant* – *claim* merupakan struktur dasar suatu argumentasi. Unsur bantuan lainnya seperti *backing* diperlukan ketika *warrant* yang digunakan tidak langsung dapat diterima. Struktur dasar argumentasi dari Toulmin ini digunakan Krummheuer (dalam Hoyles & Kuhemann, 2003) untuk menganalisis argumentasi dengan mengganti istilah *claim* dengan *conclusion* seperti pada Gambar 2.

Dalam hubungannya dengan pembuktian matematika, pernyataan-pernyataan di dalam pembuktian matematika dipandang sebagai salah satu bentuk argumentasi. Di dalam argumentasi pembuktian matematika, sebagai data adalah premis-premis, sedangkan yang menjadi *warrant* adalah definisi atau teorema. Diagram skematik ini dapat digunakan sebagai model untuk membantu memahami pembuktian suatu pernyataan matematika, dan dengan sedikit modifikasi dapat digunakan untuk mengkonstruksi pembuktian matematika.



Gambar 2 Skematif Menganalisis Argumentasi (Sumber: Krummheuer (dalam Hoyles & Kuhemann, 2003)

Diagram skematik Krummheuer dapat juga digunakan untuk mengembangkan suatu model strategi pembuktian matematika secara informal. Konklusi di dalam skematik itu, baik sebagai *target-conclussion* maupun *claim* perantara yang dilakukan di atas menggunakan penarikan kesimpulan secara deduktif. Argumentasi dengan cara seperti ini dinamakan *argumentasi deduktif*. Akan tetapi, sering ditemui bahwa antara *warrant* yang menjamin untuk menghasilkan suatu konklusi dari data yang ada kadang-kadang belum terpikirkan. Salah satu cara untuk memunculkan gagasan ke arah claim perantara adalah dengan cara abduktif. Abduksi adalah suatu penarikan kesimpulan yang dimulai dari fakta yang diamati berupa *claim*, dan suatu aturan yang diberikan, membawa pada suatu kondisi yang harus dimiliki. Langkah abduktif dapat disajikan dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{array}{l} B \\ A \Rightarrow B \\ \therefore \ \text{Premis yang lebih memungkinkan adalah } A \end{array}$$

di mana B adalah fakta yang diamati (sebagai claim), dan $A \Rightarrow B$ adalah suatu aturan (sebagai *warrant*). Argumentasi dengan cara seperti ini dinamakan *argumentasi abduktif*.

Argumentasi pembuktian yang dilakukan dengan mengkombinasikan kedua argumentasi akan dinamakan *argumentasi abduktif-deduktif*. Dengan demikian, langkah-langkah membuktikan pernyataan $A \Rightarrow B$ dengan strategi abduktif-deduktif dapat disajikan sebagai berikut

$$\begin{array}{lcl} B & \qquad\qquad & A \\ C \Rightarrow B & & A \Rightarrow C \\ \therefore \ \text{Premis yang lebih memungkinkan adalah } C & & \therefore \ C \end{array}$$

di mana C adalah konsep kunci yang menjembatani antara fakta A dan kesimpulan B

Model-model argumentasi dalam pembuktian matematika yang telah dikembangkan itu bukan model penulisan bukti matematika. Model itu hanya merupakan suatu strategi yang diharapkan dapat menjembatani kepada pemahaman mahasiswa terhadap suatu pernyataan matematika, dengan memahami langkah-langkah di dalam membuktikan pernyataan tersebut.

PENERAPAN STRATEGI PEMBUKTIAN ABDUKTIF-DEDUKTIF PADA BIDANG ANALISIS DAN ALJABAR

Berdasarkan analisis teoritis terhadap struktur pembuktian pada kedua bidang kajian, analisis real dan aljabar, tampak bahwa strategi pembuktian secara abduktif-deduktif dapat diterapkan pada masalah pembuktian yang dapat dibuktikan melalui proses deduktif, proses abduktif atau proses abduktif-deduktif. Perbedaan yang menonjol antar masalah pembuktian untuk mahasiswa pemula belajar bukti dengan masalah pembuktian pada kedua bidang kajian ini diuraikan di bawah ini:

1. Jenis masalah pembuktian di kedua bidang kajian itu, terutama pada bidang analisis real, lebih bervariasi. Hal ini menuntut pengetahuan strategi awal dalam membuktikannya. Jenis-jenis masalah pembuktian itu diantaranya:
   a. *Masalah dengan konklusi berbentuk "p atau q"*

      Mengingat konklusi yang harus ditunjukkan adalah kebenaran dari salah satu dari p atau q, maka strategi awal untuk menunjukkannya adalah dengan memisalkan p tidak benar, kemudian tunjukkan kebenaran dari q. Kebenaran dari q dapat diproses melalui proses deduktif, abduktif atau abduktif-deduktif. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh masalah pembuktian berikut:

      "*Misalkan a, b adalah bilangan real dengan $ab = 0$. Tunjukkan bahwa* $a = 0$ *atau* $b = 0$."

      Strategi awal masalah ini adalah dengan memisalkan $a \neq 0$, kemudiab harus ditunjukkan bahwa $b = 0$. Selanjutnya adalah memproses pembuktian secara deduktif, abduktif atau abduktif-deduktif dengan fakta yang dimiliki.

PREMIS	KONKLUSI
P1: $ab = 0$ **P2:** $a \neq 0$	**C**: $b = 0$

Di dalam pernyataan "*p atau q*" tidak menutup kemungkinan keduanya benar. Oleh karena itu, proses pembuktikan dilakukan dengan menunjukkan kebenaran p dan q.

b. *Masalah dengan konklusi memuat ungkapan berkuantor* "*untuk setiap*" *atau* "*untuk semua*".

Strategi awal yang diperlukan untuk membuktikan suatu pernyataan yang memuat ungkapan ini sangat penting sehingga premis yang diberikan dapat digunakan dan diorganisir serta diarahkan pada konklusi yang diharapkan. Strategi awal apa yang dibutuhkan dan bagaimana hubungannya dengan premis yang diberikan, perhatikan contoh berikut:

"*Misalkan S adalah himpunan tak kosong bagian dari himpunan bilangan real R dan $u = \sup S$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $\in > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$.*

Strategi awal untuk membuktikan "*untuk setiap $\in > 0$ terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga $u - \varepsilon < s_\varepsilon$*" adalah mengambil sembarang $\in > 0$. Dalam hal ini kita bekerja dengan hanya satu bilangan $\in > 0$ yang sembarang. Dengan demikian kita memiliki fakta sebagai berikut

PREMIS	KONKLUSI
P1: $u = \sup S$ **P2:** $\in > 0$ sembarang	**C**: $\exists\ s_\varepsilon \in S \ni u - \varepsilon < s_\varepsilon$

Kemudian kita harus menunjukkan keberadaan $s_\varepsilon \in S$ yang memenuhi u - $\varepsilon < s_\varepsilon$. Dalam hubungannya dengan premis yang diberikan, gunakan $\in > 0$ pada pengertian $u = sup\ S$. Dalam hal ini adalah $u - \in < u$ yang berdasarkan sifat suprimum akan terdapat $s_\varepsilon \in S$ sehingga u - $\varepsilon < s_\varepsilon$ (sesuai dengan sifat dalam konklusi yang diharapkan).

Sifat yang dimiliki oleh sembarang $\in > 0$ dalam konklusi itu akan berlaku secara umum untuk setiap $\in > 0$. Sehingga konklusi yang diharapkan telah diperoleh.

c. *Masalah dengan premis dan konklusi memuat ungkapan berkuantor* "*untuk setiap*" *atau* "*untuk semua*".

Strategi awal yang dimiliki pada konklusi yang memuat ungkapan "*untuk setiap*" atau "*untuk semua*" pada jenis masalah (b) dapat digunakan untuk masalah ini. Hubungan antara strategi awal pada jenis masalah (b) dengan premis yang memuat ungkapan berkuantor "*untuk setiap*" atau "*untuk semua*" perlu pemahaman yang lebih lanjut. Apabila domain dari ungkapan berkuantor pada premis dan konklusi itu sama, maka strategi awal jenis masalah (b) dapat diberlakukan pada ungkapan berkuntor dalam premis, sehingga sifat yang ada dalam premis berlaku juga untuk strategi awal yang dimiliki. Sebagai ilustrasi, perhatikan contoh masalah pembuktian berikut ini:

"*Misalkan* (x_n) adalah *barisan bilangan real yang konvergen. Tunjukkan bahwa* (x_n) *merupakan barisan Cauchy*."

Berdasarkan definisi, premis dari masalah di atas ($\lim (x_n) = x$) adalah

P: untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga untuk semua bilangan asli $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Sedangkan kondisi yang harus dimiliki untuk tiba pada konklusi adalah

C: untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $H(\varepsilon)$ sehingga untuk semua bilangan asli $n, m \geq H(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Berdasarkan konklusi (C) di atas, strategi awal yang harus dimiliki adalah mengambil sembarang $\varepsilon > 0$. Kemudian *kita harus mencari* bilangan asli $H(\varepsilon)$ sehingga untuk semua bilangan asli

$$n, m \geq H(\varepsilon) \quad \text{berlaku} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Karena domain dari ungkapan berkuantor dalam premis (P) adalah sama, maka sifat yang dimiliki oleh premis itu akan berlaku juga untuk $\varepsilon > 0$ yang telah dimiliki. Oleh karena itu keberadaan bilangan asli $K(\varepsilon)$ dijamin sehingga untuk semua bilangan asli $n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$.

Proses selanjutnya adalah menjembatani antara

$$n \geq K(\varepsilon) \text{ berlaku } |x_n - x| < \varepsilon$$

dan

$$n, m \geq H(\varepsilon) \quad \text{berlaku} \quad |x_n - x_m| < \varepsilon$$

dengan $H(\varepsilon)$ yang harus dicari.

d. *Masalah dengan konklusi menunjukkan ketunggalan dari suatu objek*. Strategi awal menunjukkan ketunggalan adalah memisalkan terdapat dua objek yang memiliki sifat dalam konklusi itu. Kita harus menunjukkan bahwa kedua objek itu adalah sama. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh masalah berikut:

> "*Misalkan M adalah suatu himpunan bagian dari grup G. Tunjukkan bahwa subgrup terkecil yang memuat M adalah tunggal.*"

Strategi awal menunjukkan ketunggal adalah memisalkan H_1 dan H_2 masing-masing merupakan subgrup terkecil yang memuat M. Kita akan menunjukkan bahwa $H_1 = H_2$. Berdasarkan pengertian terkecil, H_1 adalah subgroup terkecil yang memuat M, sedangkan kita pandang H_2 subgrup yang memuat M, maka berlaku

$$H_1 \subseteq H_2$$

Sekarang kita perhatikan subgrup terkecil H_2 yang memuat M, dengan memandang H_1 sebagai subgrup yang memuat M. Dari sini akan diperoleh

$$H_2 \subseteq H_1$$

Dari $H_1 \subseteq H_2$ dan $H_2 \subseteq H_1$ diperoleh

$$H_1 = H_2$$

Dari sini dapat disimpulkan bahwa subgrup terkecil yang memuat M adalah tunggal.

2. Dalam beberapa pembuktian dalam bidang kajian analisis dan struktur aljabar sangat sering muncul *koncep kunci* yang kadang-kadang sulit dipahami kemunculan gagasannya. Konsep kunci ini sangat menentukan pencapaian konklusi yang diharapkan. Oleh karena itu, pengalaman mahasiswa dalam membuktikan sangat berperan dalam memunculkan konsep kunci ini. Sebagai ilustrasi, perhatikan pembuktian masalah berikut ini:

   Ketidaksamaan Cauchy**:** *Jika* $n \in N$ *dan* $a_1, \ . \ . \ . \ , a_n$ *dan* $b_1, \ . \ . \ . \ . \ , b_n$ *adalah bilangan real*, *maka berlaku*

   $$(a_1b_1 + \ . \ . \ . + a_nb_n)^2 \ \leq \ (a_1^2 + . \ . \ . + a_n^2)(b_1^2 + . \ . \ . + b_n^2) \qquad (5)$$

   Untuk membuktikan ketaksamaan ini, didefinisikan fungsi $F : R \to R$ *untuk* $t \in R$ *dengan*

   $$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \ . \ . \ . \ + (a_n - tb_n)^2$$

   atau

   $$F(t) = A - 2Bt + Ct^2 \ \geq \ 0$$

   dengan

   $$A = a_1^2 + . \ . \ . + a_n^2, \quad B = a_1b_1 + \ . \ . \ . + a_nb_n, \quad C = b_1^2 + . \ . \ . + b_n^2$$

   Karena fungsi kuadratik $F(t)$ *adalah nonnegatif untuk semua* $t \in R$, *maka fungsi ini tidak memiliki dua akar real yang berbeda. Dengan demikian, nilai diskriminan,*

   $$\Delta = (-2B)^2 - 4AC = 4(B^2 - AC)$$

   harus memenuhi $\Delta \leq 0$. *Sehingga diperoleh* $B^2 \leq AC$ *yang tepat sama dengan ketaksamaan* (5).

   Konsep kunci dalam pembuktian Ketaksamaan Cauchy di atas adalah mendefinisikan fungsi $F : R \to R$ dengan

   $$F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + \ . \ . \ . \ + (a_n - tb_n)^2$$

Fungsi F ini sangat menentukan tercapainya konklusi yang diharapkan. Akan tetapi gagasan untuk mendefinisikan atau memunculkan konsep kunci itu sangat sulit.

Dalam bidang kajian Struktur Aljabar, pendefinisian fungsi seperti di atas sangat sering muncul pada masalah menunjukkan suatu isomorphik, seperti contoh berikut:

Misalkan G adalah suatu grup dan $I(G)$ menyatakan grup dari semua inner automorphisma dari G. Tunjukkan bahwa terdapat suatu isomorphisma dari $I(G)$ ke grup faktor G/Z di mana Z adalah center dari G.

Konsep kunci untuk membuktikan masalah ini adalah pendefinisian fungsi

$$\varphi : G \to I(G)$$

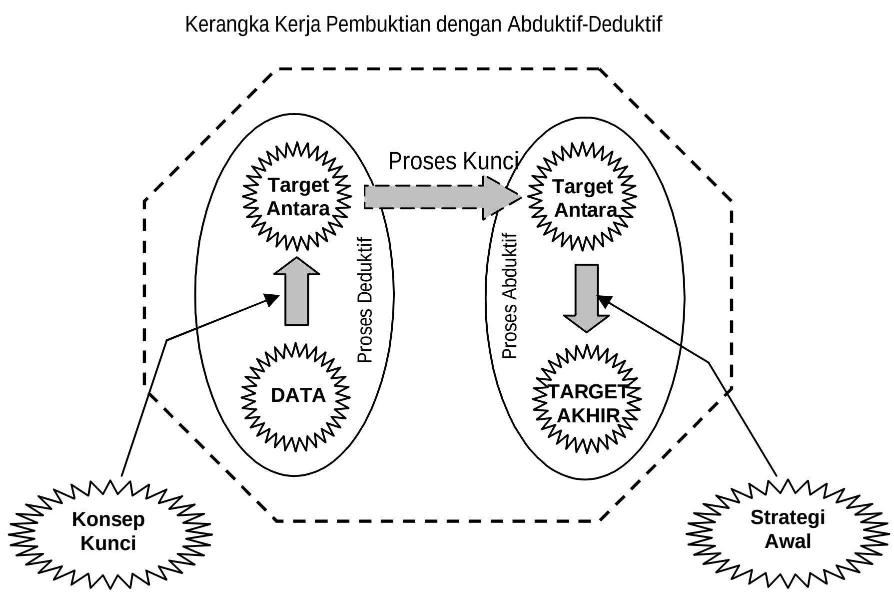
$$g \mapsto f_{g^{-1}} \quad \forall\, g \in G$$

Proses pembuktian selanjutnya menunjukkan bahwa φ merupakan suatu homomorphisma dari G onto $I(G)$, dan menunjukkan bahwa Ker(φ) = $Z(G)$

3. Strategi awal yang berhubungan dengan teknik membuktikan pada bidang kajian analisis dan struktur aljabar lebih bervariasi. Teknik pembuktian tak langsung, baik menggunakan teknik kontradiksi maupun teknik kontrapositif, dan teknik mengkonstruksi keberadaan suatu objek sering diperkenalkan dalam pembuktian. Khususnya teknik pembuktian tak langsung seringkali dapat lebih mudah dalam membuktikan suatu masalah dibandingkan dengan teknik pembuktian secara langsung. Perbedaan antara pembuktian tak langsung dengan secara langsung (strategi pembuktian dengan abduktif – deduktif) hanya terletak pada adanya strategi awal dalam pembuktian tak langsung. Sedangkan proses pembuktian selanjutanya adalah sama, yaitu mengembangkan premis yang dimiliki. Konklusi yang diharapkan dalam pembuktian tak langsung adalah adanya suatu kontradiksi untuk teknik kontradiksi, atau negasi dari premis pernyataan semula untuk teknik kontrapositif.

KERANGKA KERJA TEORITIS PEMBUKTIAN MATEMATIKA

Berdasarkan kajian secara teoritis terhadap struktur pembuktian pada bidang analisis real dan struktur aljabar, kerangka kerja teoritis pembuktian matematika dapat dilihat pada Gambar 3.



Gambar 3 Kerangka Kerja Teoritis Pembuktian Matematika

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Kesimpulan dari hasil kajian secara teoritis terhadap pembuktian matematika pada mata kuliah bidang analisis real dan struktur aljabar adalah sebagai berikut:

1. Proses pembuktian masalah dalam bidang analisis dan struktur aljabar yang telah dinyatakan secara operasional (premis dan konklusi dapat dielaborasi berdasarkan aturan yang telah dijamin kebenarannya) dapat dikonstruksi melalui penerapan strategi abduktif-deduktif.

2. Pengetahuan tentang strategi awal seperti teknik pembuktian tak langsung dan teknik mengelaborasi konklusi, dalam memulai suatu pembuktian perlu dimiliki mahasiswa, sehingga masalah dapat dirumuskan dalam bentuk yang lebih operasional.
3. Konsep kunci yang menentukan keberhasilan proses pembuktian seringkali muncul ketika mengkonstruksi bukti dalam bidang analisis dan struktur aljabar. Pengalaman dalam mengkonstruksi bukti sangat berperan dalam melahirkan gagasan dari konsep kunci tersebut.

Saran

Kerangka kerja yang dihasilkan dalam penelitian ini disusun secara teoritis berdasarkan kajian terhadap bentuk-bentuk permasalahan dan struktur pembuktian dalam bidang analisis real dan aljabar abstrak. Untuk melihat efektifitas dan memvalidasi kerangka kerja pembuktian ini disarankan dilakukan penelitian lanjutan dengan mengimplementasikannya di lapangan.

DAFTAR RUJUKAN

Arnawa. 2006. *Meningkatkan Kemampuan Pembuktian Mahasiswa dalam Aljabar Abstrak Melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS*. (Disertasi). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.

Hoyles, C. dan Kuchemann, D. (2002). Students’ understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics* 51, 193-223.

Juandi, D. 2006. *Meningkatkan Daya Matematik Mahasiswa Calon Guru Matematika Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah*. (Disertasi). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia

Kusnandi. 2008. *Pembelajaran Matematika dengan Strategi Abduktif-Deduktif untuk Menumbuhkembangkan Kemampuan Membuktikan Pada mahasiswa* (Disertasi). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.

Moore, R.C. 1994. Making the transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27: 249-266.

Pedemonte, B. 2003. What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation. *Proceeding of the third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.

Sabri. 2003. *Prospective Secondary School Teachers' Conceptions of Mathematical Proof in Indonesia*. Thesis: Curtin University of Technology.

Tucker, T.W. 1999. On the Role of Proof in Calculus Courses *Contemporary Issues in Mathematics Education MSRI*. Vol. 36.

Weber, K. 2002. Student Difficulty in Constructing Proofs: The need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Matematics* 48: 101-119.