BAB I
INDUKSI MATEMATIKA

1.1 Induksi Matematika

Induksi matematika adalah suatu metode yang digunakan untuk memeriksa validasi suatu pernyataan yang diberikan dalam suku-suku bilangan asli. Dalam pembahasan ini, kita akan menyatakan Prinsip Induksi Matematika dan memberikan contoh-contoh untuk mengilustrasikan bagaimana proses pembuktian dengan menggunakan induksi matematika.

Kita akan menotasikan himpunan bilangan asli dengan

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\},$$

dengan operasi tambah dan perkalian seperti biasa. Bilangan Asli $\mathbb{N}$ ini memenuhi sifat terurut sempurna (Well-Ordering Property) yaitu,

1.2 Sifat Terurut Sempurna

Setiap himpunan bagian yang tidak kosong dari $\mathbb{N}$ mempunyai bilangan terkecil.

Sifat ini mengatakan bahwa jika S adalah himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ dan $S \neq \phi$, maka ada bilangan $m \in S$ sehingga $m \leq k$ untuk setiap $k \in S$.

Catatan: Untuk dapat menerapkan sifat terurut sempurna (*WOP*) *ini, kita harus memiliki suatu himpunan yang tidak kosong.*

1.3 Prinsip Induksi Matematika

Misalkan S suatu himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ *yang mempunyai sifat:*

(1) $1 \in S$

(2) *jika* $k \in S$ *maka* $k + 1 \in S$

Maka $S = N$

Prinsip Induksi Matematika ini mengatakan bahwa suatu himpunan bagian S dari bilangan asli $\mathbb{N}$ di mana sifat (1) dan (2) dimiliki oleh himpunan itu, maka himpunan bagian itu akan merupakan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ atau $S = \mathbb{N}$.

Contoh 1 Buktikan $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ untuk setiap n bilangan asli

Jawab

Pernyataan yang akan dibuktikan adalah

$$P_n : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Dengan demikian, P_1 adalah $1 = \frac{1}{2}.1.(1+1)$, $P_2 = 1 + 2 = \frac{1}{2}.2.(2+1)$ dan seterusnya. Untuk membuktikan pernyataan itu, perhatikan bahwa P_1 adalah benar. Kemudian, misalkan bahwa

$$P_n : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

adalah benar, dan kita harus membuktikan bahwa P_{n+1} adalah benar. Untuk ini, kita tambahkan kedua ruas pernyataan P_n dengan $n + 1$ dan diperoleh

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}[n(n+1) + 2(n+1)] \\ &= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{2}(n+1)[(n+1)+1] \end{aligned}$$

Dari sini kita peroleh bahwa P_{n+1} adalah benar. Hal ini menunjukkan bahwa pernyataan

$$P_n : 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

adalah benar untuk setiap n bilangan asli

Contoh 2 Buktikan bahwa semua bilangan berbentuk $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap n bilangan asli.

Jawab

Pernyataan yang akan dibuktikan adalah

$$P_n : 7^n - 2^n \text{ dapat dibagi oleh } 5$$

P_1 adalah benar sebab $7^1 - 2^1 = 5$. Selanjutnya, kita asumsikan bahwa P_n adalah benar. Dengan asumsi ini kita akan menyelidiki kebenaran pernyataan P_{n+1} . Untuk itu, kita perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
7^{n+1} - 2^{n+1} &= 7.7^n - 7.2^n + 7.2^n - 2.2^n \\
&= 7[7^n - 2^n] + 5.2^n \\
&= 7(5m) + 5.\,2^n \qquad m \in \mathbb{N} \text{ (asumsi } P_n \text{ benar)} \\
&= 5(7m + 2^n)
\end{aligned}
$$

Karena $7m + 2^n$ bilangan asli, maka dari kesamaan terakhir kita dapat menyim-pulkan bahwa $7^{n+1} - 2^{n+1}$ dapat dibagi dengan 5. Dengan kata lain, pernyataan P_{n+1} adalah benar.

Dengan demikian, bilangan berbentuk $7^n - 2^n$ dapat dibagi oleh 5 untuk setiap n bilangan asli.

Latihan 1

1. Buktikanlah formula-formula di bawah ini dengan induksi matematika:
   a. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ untuk semua $n \geq 1$
   b. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ untuk semua $n \geq 1$
   c. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ untuk semua $n \geq 1$
   d. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ untuk semua $n \geq 1$
   e. $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ untuk semua $n \geq 1$
2. Buktikan bahwa $n^3 + 5n$ dapat dibagi dengan 6 untuk semua $n \in \mathbb{N}$
3. Buktikan bahwa $5^{2n} - 1$ dapat dibagi dengan 8 untuk semua $n \in \mathbb{N}$
4. Buktikan bahwa $5^n - 4n - 1$ dapat dibagi dengan 16 untuk semua $n \in \mathbb{N}$
5. Buktikan bahwa jumlah pangkat tiga dari sembarang tiga bilangan asli yang berurutan, n, $n + 1$, $n + 2$ dapat dibagi dengan 9.
6. Tunjukkan ketidaksamaan Bernoulli: Jika $1 + a > 0$, maka
   $$(1 + a)^n \geq 1 + na$$
   untuk semua $n \in \mathbb{N}$
7. Untuk semua $n \in \mathbb{N}$, buktikan ketidaksamaan di bawah ini dengan induksi matematika:
   a. $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}.$

b. $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ untuk semua $n \geq 2$

c. $2n - 3 \leq 2^{n-2}$ untuk semua $n \geq 5$

d. $2^n < n!$ untuk semua $n \geq 4$

e. $n\,! > n^2$ untuk semua $n \geq 4$, sedangkan $n\,! > n^3$ untuk semua $n \geq 6$

8. Buktikan bahwa pangkat tiga dari sembarang bilangan bulat dapat ditulis sebagai selisih dari dua bilangan kuadrat.

   Petunjuk: Perhatikan bahwa

$$n^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) - (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n-1)^3$$

BAB II
TEORI PEMBAGIAN
DALAM BILANGAN BULAT

2.1 Algoritma Pembagian

Algoritma pembagian merupakan proses pembagian suatu bilangan bulat dengan bilangan bulat positif lainnya. Dari sini akan diperoleh hasil pembagian, dan sisa pembagian. Bilangan bulat yang dibagi dapat dinyatakan dalam suku-suku hasil bagi, pembagi dan sisa pembagian, seperti yang dinyatakan dalam teorema di bawah ini.

Teorema 2.1 Algoritma Pembagian

Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dengan $b > 0$, maka ada tepat satu bilangan bulat q dan r yang memenuhi

$$a = qb + r \qquad 0 \le r < b$$

*Bilangan bulat q disebut **hasil bagi**, sedangkan r disebut **sisa pembagian***

Bentuk yang lebih umum dari Algoritma Pembagian diperoleh dengan mengganti pembatasan $b > 0$ dengan persyaratan yang sederhana $b \neq 0$, seperti yang dinyatakan berikut ini

Akibat *Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dengan $b \neq 0$, maka ada tepat satu bilangan bulat q dan r sehingga*

$$a = qb + r \qquad 0 \le r < |b|$$

Contoh 1 Misalkan kita ingin membagi bilangan-bilangan 1, –2, 61, dan –59 dengan –7, maka kita memperoleh pernyataan-pernyataan

$$1 = 0(-7) + 1$$
$$-2 = 1(-7) + 5$$
$$61 = (-8)(-7) + 5$$
$$-59 = 9(-7) + 4$$

Contoh **2** Tunjukkan bahwa sisa pembagian kuadrat bilangan bulat dengan 4 adalah 0 atau 1

Jawab

Misalkan a bilangan bulat. Ada dua jenis bilangan untuk a, bilangan genap atau bilangan ganjil. Untuk bilangan genap, a dapat ditulis sebagai $a = 2q$. Sekarang perhatikan bahwa

$$(2q)^2 = 4q^2 = 4k \qquad k \in \mathrm{N}$$

Dari sini kita peroleh bahwa sisa pembagian kuadrat bilangan genap dengan 4 adalah 0. Selanjutnya, misalkan a bilangan ganjil maka a dapat ditulis sebagai $a = 2q + 1$, sehingga

$$(2q+ 1)^2 = 4(q^2 + q) + 1 = 4k + 1, \qquad k \in \mathrm{N}$$

Dengan demikian, sisa pembagian bilangan ganjil dengan 4 adalah 1. Oleh karena itu, bilangan kuadrat dari bilangan bulat dibagi dengan 4 mempunyai sisa 0 atau 1.

Contoh 3 Tunjukkan bahwa bilangan kuadrat sempurna mempunyai bentuk $4k$ atau $4k + 1$. Kemudian periksalah apakah konvers dari pernyataan itu benar atau salah

Jawab

Pernyataan di atas dapat dinyatakan secara operasional sebagai berikut: misalkan a adalah bilangan bulat, tunjukkan bahwa a^2 berbentuk $4k$ atau $4k + 1$. Untuk membuktikannya, pertama terapkan algoritma pembagian pada bilangan bulat a dan 4, maka diperoleh

$$a = 4q + r \qquad \text{dengan} \quad 0 \leq r < 4$$

Nilai r yang mungkin adalah 0, 1, 2, atau 3. Dengan demikian bilangan bulat a dapat dinyatakan dalam bentuk $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ atau $4q + 3$. Sekarang kita akan menentukan bentuk dari a^2 dengan cara mengkuadratkan keempat bentuk dari a dan diperoleh sebagai berikut:

Untuk $a = 4q$ diperoleh

$$(4q)^2 = 16\,q^2 = 4\,(4q^2) = 4k \quad \text{dengan} \; k = 4q^2$$

Untuk $a = 4q + 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}(4q + 1)^2 &= 16q^2 + 8q + 1\\ &= 4(4q^2 + 2q) + 1\\ &= 4k + 1 \qquad \text{dengan} \;\; k = 4q^2 + 2q\end{aligned}$$

Untuk $a = 4q + 2$ diperoleh

$$\begin{aligned}(4q+2)^2 &= 16q^2 + 16q + 4 \\ &= 4(4q^2 + 4q + 1) \\ &= 4k \qquad \text{dengan } k = 4q^2 + 2q\end{aligned}$$

Sedangkan untuk $a = 4q + 3$ diperoleh

$$\begin{aligned}(4q+3)^2 &= 16q^2 + 24q + 9 \\ &= 4(4q^2 + 6q + 2) + 1 \\ &= 4k + 1 \qquad \text{dengan } k = 4q^2 + 6q + 2\end{aligned}$$

Dari sini nampak bahwa bentuk dari bilangan kuadrat sempurna adalah $4k$ atau $4k + 1$.

Konvers dari pernyataan itu tidak benar, sebagai contoh: 5 adalah bentuk dari $4k + 1$, tetapi 5 bukan bilangan kuadrat sempurna.

Contoh 4 Misalkan a bilangan bulat dengan $a \geq 1$, maka bilangan berbentuk $\frac{a(a^2+2)}{3}$ merupakan bilangan bulat

Jawab

Berdasarkan Algoritma pembagian, setiap bilangan bulat a mempunyai bentuk salah satu dari $3q$, $3q + 1$ atau $3q + 2$. Untuk kasus pertama diperoleh

$$\frac{a(a^2+2)}{3} = q(9q^2+2)$$

yang jelas merupakan bilangan bulat. Untuk $a = 3q + 1$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{a(a^2+2)}{3} &= \frac{(3q+1)((3q+1)^2+2)}{3} \\ &= (3q+1)(3q^2+2q+1)\end{aligned}$$

yang juga merupakan bilangan bulat. Terakhir, untuk $a = 3q + 2$ diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{a(a^2+2)}{3} &= \frac{(3q+2)((3q+2)^2+2)}{3} \\ &= (3q+2)(3q^2+4q+2)\end{aligned}$$

yang juga merupakan bilangan bulat. Dengan demikian, untuk setiap kasus bilangan bulat a, bentuk bilangan di atas merupakan bilangan bulat.

Latihan 2.1

1. Tunjukkan bahwa sembarang bilangan bulat berbentuk $6k + 5$ merupakan bilangan bulat berbentuk $3m + 2$, tetapi konvers dari pernyataan itu tidak benar.
2. Gunakan Algoritma Pembagian untuk memeriksa pernyataan berikut:
   a. Bentuk bilangan dari kuadrat bilangan bulat adalah salah satu dari $3k$ atau $3k + 1$
   b. Bentuk bilangan dari pangkat tiga bilangan bulat adalah salah satu dari $9k$, $9k + 1$ atau $9k + 8$.
   c. Bentuk bilangan dari pangkat empat bilangan bulat adalah salah satu dari $5k$ atau $5k + 1$.
3. Buktikan bahwa $3a^2 - 1$ tidak pernah merupakan suatu bilangan kuadrat sempurna.
   Petunjuk : Gunakan soal 2a.
4. Untuk $n \geq 1$, buktikan bahwa $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ merupakan bilangan bulat.
5. Tunjukkan bahwa pangkat tiga bilangan bulat berbentuk $7k$ atau $7k \pm 1$
6. Perhatikan barisan bilangan bulat berikut ini.

$$11, 111, 1111, 11111, \ldots.$$

   Buktikan bahwa tidak ada bilangan bulat dalam barisan itu yang merupakan bilangan kuadrat sempurna
   Petunjuk: Bentuk bilangan 111 . . . 111 dapat ditulis sebagai

$$111 \ldots 111 = 111 \ldots 108 + 3 = 4k + 3$$

7. Selidikilah bahwa jika suatu bilangan bulat merupakan bilangan kuadrat sekaligus pangkat tiga dari suatu bilangan (sebagai contoh $16 = 8^2 = 4^3$) maka bilangan bulat itu haruslah berbentuk salah satu dari $7k$ atau $7k + 1$
8. Untuk $n \geq 1$, periksalah bahwa bilangan bulat $n(7n^2 + 5)$ mempunyai bentuk $6k$
9. Jika n adalah bilangan ganjil, tunjukkan bahwa $n^4 + 4n^2 + 11$ mempunyai bentuk $16k$

2.2 Pembagi Persekutuan Terbesar

Kasus khusus di mana sisa dari Algoritma pembagian sama dengan nol, diperoleh

$$a = qb$$

Dalam hal ini dikatakan bahwa b membagi a atau a dapat dibagi dengan b, seperti yang dinyatakan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 2.1 *Suatu bilangan bulat a dikatakan dapat dibagi dengan suatu bilangan bulat $b \neq 0$, ditulis dengan simbol $b \mid a$, jika ada bilangan bulat q sehingga $a = qb$. Dalam hal ini dikatakan bahwa b adalah* ***pembagi*** *atau* ***faktor*** *dari a*

Akibat langsung dari definisi di atas dapat kita lihat pada teorema di bawah ini (Perlu diingat bahwa meskipun tidak dinyatakan, pembagi selalu diasumsikan bilangan bulat positif)

Teorema 2.2 *Untuk bilangan-bilangan bulat a, b, c berlaku pernyataan berikut ini*

(a) $a \mid 0$, $1 \mid a$, $a \mid a$

(b) $a \mid 1$ *jika dan hanya jika* $a = \pm 1$

(c) *Jika* $a \mid b$ *dan* $c \mid d$, *maka* $ac \mid bd$

(d) *Jika* $a \mid b$ *dan* $b \mid c$, *maka* $a \mid c$

(e) $a \mid b$ *dan* $b \mid a$ *jika dan hanya jika* $a = \pm b$

(f) *Jika* $a \mid b$ *dan* $b \neq 0$, *maka* $|a| \leq |b|$

(g) *Jika* $a \mid b$ *dan* $a \mid c$, *maka* $a \mid (bx + cy)$ *untuk sembarang bilangan* x *dan* y.

Pengertian pembagi persekutuan terbesar secara matematika dinyatakan dalam definisi di bawah ini.

Definisi 2.2 *Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dengan salah satu diantaranya tidak sama dengan nol.* ***Pembagi persekutuan terb****esar dari a dan b dinota-sikan dengan $ppb(a, b)$ adalah bilangan bulat positif d yang memenuhi berikut ini:*

(a) $d \mid a$ *dan* $d \mid b$.

(b) *Jika* $c \mid a$ *dan* $c \mid b$, *maka* $c \leq d$.

Teorema berikut akan memperlihatkan bahwa $ppb(a, b)$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi liniear dari a dan b (bentuk $ax + by$ di mana x dan y bilangan-bilangan bulat). Sebagai contoh,

$$ppb(-12,30) = 6 = (-12)\,2 + 30 \cdot 1$$

$$ppb(-8, -36) = 4 = (-8)\,4 + (-36)(-1)$$

Teorema 2.3 *Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dengan tidak keduanya nol, maka ada bilangan bulat x dan y sehingga*

$$ppb(a, b) = ax + by$$

Akibat *Jika a dan b bilangan-bilangan bulat yang tidak keduanya nol, maka himpunan*

$$T = \{ax + by \mid x,\ y \text{ bilangan bulat}\}$$

dengan tepat menyatakan himpunan semua kelipatan dari $d = ppb(a, b)$

Definisi 2.3 *Dua bilangan bulat a dan b yang tidak keduanya nol dikatakan* ***relatif prima*** *apabila $ppb(a, b) = 1$.*

Teorema berikut menjelaskan pengertian bilangan-bilangan bulat yang relatif prima dalam pengertian kombinasi linear

Teorema 2.4 *Misalkan a dan b adalah bilangan bulat yang tidak keduanya nol. Maka a dan b adalah relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sehingga* $1 = ax + by$.

Akibat 1 Jika $ppb(a, b) = d$ maka terdapat bilangan bulat r dan s yang relatif prima

Akibat 2 *Jika $a \mid c$ dan $b \mid c$ dengan $ppb(a, b) = 1$ maka $ab \mid c$*

Teorema 2.5 **Lemma Euclid** *Jika $a \mid bc$ dengan $ppb(a, b) = 1$ maka $a \mid c$*

Teorema 2.6 **Alternatif Definisi ppb**

Misalkan a, b adalah bilangan bulat yang keduanya tidak nol. Bilangan bulat d, $d = ppb(a, b)$ jika dan hanya jika

(a) $d \mid a$ dan $d \mid b$

(b) jika $c \mid a$ dan $c \mid b$, maka $c \mid d$

Latihan 2.2

1. Jika $a \mid b$ tunjukkan bahwa $(-a) \mid b$, $a \mid (-b)$ dan $(-a) \mid (-b)$
2. Diberikan bilangan-bilangan bulat a, b, c, d, tunjukanlah pernyataan di bawah ini.
   a. Jika $a \mid b$ maka $a \mid bc$
   b. Jika $a \mid b$ dan $a \mid c$ maka $a^2 \mid bc$
   c. $a \mid b$ jika dan hanya jika $ac \mid bc$ di mana $c \neq 0$
   d. Jika $a \mid b$ dan $c \mid d$ maka $ac \mid bd$

3. Jika $a \mid (b + c)$, periksalah apakah $a \mid b$ atau $a \mid c$

4. Untuk sembarang bilangan bulat a, tunjukkan bahwa
   a. $2 \mid a(a + 1)$ dan $3 \mid a(a + 1)(a + 2)$
   b. $3 \mid a(2a^2 + 7)$
   c. Jika a bilangan ganjil maka $32 \mid (a^2 + 3)(a^2 + 7)$

5. Untuk suatu bilangan bulat a yang tidak sama dengan nol, tunjukkan bahwa $ppb(a, 0) = |a|$, $ppb(a,a) = |a|$ dan $ppb(a, 1) = 1$

6. Jika a dan b adalah bilangan bulat yang tidak keduanya nol, tunjukkan bahwa

$$ppb(a, b) = ppb(-a, b) = ppb(a, -b) = ppb(-a, -b)$$

7. Buktikan bahwa untuk sembarang bilangan bulat positif n dan sembarang bilangan bulat a, $ppb(a, a + n)$ membagi n; dari sini $ppb(a, a + 1) = 1$

8. Diberikan bilangan bulat a dan b, buktikan jika ada bilangan bulat x dan y sehingga $ax + by = ppb(a, b)$ maka $ppb(x, y) = 1$

9. Untuk sembarang bilangan bulat a, tunjukkan pernyataan berikut ini
   a. $ppb(2a + 1, 9a + 4) = 1$
   b. $ppb(5a + 2, 7a + 3) = 1$
   c. Jika a adalah bilangan ganjil maka $ppb(3a, 3a + 2) =1$

10. Periksalah sifat-sifat pembagi persekutuan terbesar di bawah ini
   a. Jika $ppb(a, b) = 1$ dan $c \mid a$ maka $ppb(b, c) = 1$
   b. Jika $ppb(a, b) = 1$ maka $ppb(ac, b) = ppb(c, b)$
   c. Jika $ppb(a, b) = 1$, $d \mid ac$ dan $d \mid bc$ maka $d \mid c$

11. Periksalah masing-masing pernyataan berikut ini
   a. Jika a bilangan bulat, maka $6 \mid a(a^2 + 11)$
   b. Jika a suatu bilangan ganjil maka $24 \mid a(a^2 - 1)$
      Petunjuk: Kuadrat dari bilangan ganjil berbentuk $8k + 1$
   c. Jika a dan b bilangan ganjil maka $8 \mid (a^2 - b^2)$
   d. Jika a suatu bilangan bulat yang tidak dapat dibagi dengan 2 atau 3 maka $24 \mid (a^2 + \quad 23)$

2.3 Algoritma Euclid

Pada sub bab ini akan dibahas bagaimana cara mencari pembagi persekutuan terbesar yang efisien, tanpa mendaftarkan semua pembaginya. Cara ini dikenal sebagai *Algoritma Euclid*.

Langkah pertama Algoritma Euclid adalah menerapkan Algoritma Pembagian pada bilangan bulat a dan b dan diperoleh

$$a = q_1 b + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b$$

Apabila kita memperoleh $r_1 = 0$ maka tentu saja $b \mid a$ dan dengan demikian $ppb(a, b) = b$. Sedangkan jika $r_1 \neq 0$, bagilah b dengan r_1 untuk mendapatkan bilangan bulat q_2 dan r_2 yang memenuhi

$$b = q_2 r_1 + r_2 \qquad 0 \leq r_2 < r_1$$

Apabila $r_2 = 0$ maka proses algoritma pembagian dihentikan, sedangkan jika tidak, lakukan seperti sebelumnya untuk memperoleh

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3 \qquad 0 \leq r_3 < r_2$$

Proses pembagian ini berlanjut sampai kita mendapatan sisa pembagian sama dengan nol, katakanlah pada langkah ke-(n+1) di mana r_{n-1} dibagi dengan r_n.

Hasil dari proses Algoritma Euclid ini adalah sistem persamaan di bawah ini

$$\begin{array}{rl}
a = q_1 b + r_1 & 0 \leq r_1 < b \\
b = q_1 r_1 + r_2 & 0 \leq r_2 < r_1 \\
r_1 = q_3 r_2 + r_3 & 0 \leq r_3 < r_2 \\
\vdots & \\
r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n & 0 \leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0 &
\end{array}$$

Kita menduga bahwa r_n yang merupakan sisa pembagian terakhir yang tidak sama dengan nol adalah $ppb(a, b)$. Dugaan ini dibuktikan oleh lemma di bawah ini.

Lemma *Jika* $a = qb + r$ *maka* $ppb(a, b) = ppb(b, r)$

Sebagai illustrasi bagaimana proses mencari pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat dengan menggunakan Algoritma Eclid dan bagaimana menyatakan *ppb* yang diperoleh sebagai kombinasi linear dari kedua bilangan bulat itu, perhatikan contoh di bawah ini.

Contoh 1 Carilah *ppb*(12378, 3054), kemudian tentukan bilangan bulat x dan y sehingga *ppb*(12378, 3054) = 12378x + 3054y

Jawab

Dengan menggunakan Algoritma Pembagian kita memperoleh persamaan-persamaan

$$
\begin{aligned}
12378 &= 4 \,.\, 3054 + 162 \\
3054 &= 18 \,.\, 162 + 138 \\
162 &= 138 + 24 \\
138 &= 5 \,.\, 24 + 18 \\
24 &= 1 \,.\, 18 + 6 \\
18 &= 3 \,.\, 6 + 0
\end{aligned}
$$

Dengan demikian *ppb*(12378, 3054) = 6.

Selanjutnya untuk menyatakan 6 sebagai kombinasi linear dari 12378 dan 3054, kita mulai dengan menyatakan 6 = 24 – 1.18 dalam persamaan kedua dari terakhir kemudian berturut-turut mengeliminasi sisa pembagian 18, 24, 138, dan 162:

$$
\begin{aligned}
6 &= 24 - 1.18 \\
&= 24 - (138 - 5 \,.\, 24) \\
&= 6 \,.\, 24 - 138 \\
&= 6(162 - 138) - 138 \\
&= 6 \,.\, 162 - 7 \,.\, 138 \\
&= 6 \,.\, 162 - 7(3054 - 18 \,.\, 162) \\
&= 132 \,.\, 162 - 7 \,.\, 3054 \\
&= 132(12378 - 4 \,.\, 3054) - 7 \,.\, 3054 \\
&= 132 \,.\, 12378 + (-535)3054
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, kita mempunyai *ppb*(12378, 3054) = 6 = 12378x + 3054y dengan x = 132 dan y = –535

Pertanyaannya sekarang adalah apakah bilangan bilangan ini merupakan satu-satunya cara untuk mernyatakan 6 sebagai kombinasi linear dari 12378 dan 3054 ? Ternyata tidak ! Di antara kemungkinan lain, kita dapat melakukannya dengan menambahkan dan mengurangkan 3054 . 12378 pada kombinasi linear di atas seperti berikut ini

$$6 = (132 \cdot 12378 + 3054.12378 + (-535) \cdot 3054 - 3054 \cdot 12378$$
$$= (132 + 3054)12378 + (-535 - 12378)3054$$
$$= 3186 \cdot 12378 + (-12913)3054$$

Teorema berikut merupakan akibat dari Algoritma Euclid

Teorema 2.6. *Jika* $k > 0$ *maka* $ppb(ka, kb) = k\,\mathrm{ppb}(a, b)$

Akibat *Untuk sembarang bilangan bulat* $k \neq 0$, $ppb(ka, kb) = |k|\ ppb(a, b)$

$$ppb(12, 30) = 3\,ppb(4, 10) = 3 \cdot 2\,ppb(2, 5) = 6 \cdot 1 = 6$$

Definisi 2.3 ***Kelipatan persekutuan terkecil*** *dari dua bilangan bulat yang tidak nol* a *dan* b *yang dinotasikan dengan kpk(a, b), adalah bilangan bulat positif* m *yang memenuhi berikut ini:*

(a) $a \mid m$ *dan* $b \mid m$

(b) *Jika* $a \mid c$ *dan* $b \mid c$ *dengan* $c > 0$ *maka* $m \leq c$.

Sebagai contoh, kelipatan persekutuan positif dari bilangan –12 dan 30 adalah 60, 120, 180, . . . ; dari sini diperoleh bahwa *kpk*(-12,30) = 60. Bagaimanakah hubungan antara pembagi persekutuan terbesar dengan kelipatan persekutuan terkecil ? Hubungan ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.7 *Untuk bilangan bulat positif* a *dan* b, $ppb(a, b)\,kpk(a, b) = ab$

Contoh 2 Tentukan kelipatan persekutuan terkecil dari 12378 dan 3054

Jawab

Kita akan menggunakan Teorema 2.7 untuk menentukan *kpk*(12378, 3054). Dengan menggunakan Algoritma Euclid, kita dapat menemukan *ppb*(12378, 3054) = 6. Berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh

$$kpk(12378, 3054) = \frac{12378.3054}{6} = 6300402$$

Latihan 2.3

1. Carilah *ppb*(143, 227), *ppb*(306, 657) dan *ppb*(272, 1479)
2. Gunakan Algoritma Euclidean untuk mendapatkan bilangan bulat x dan y yang memenuhi berikut ini
   (a) $ppb(56, 72) = 56x + 72y$
   (b) $ppb(24, 138) = 24x + 138y$

(c) $ppb(119, 272) = 119x + 272y$

(d) $ppb(1769, 2378) = 1769x + 2378y$

3. Buktikan bahwa jika d adalah pembagi persekutuan dari a dan b maka $d = ppb(a, b)$ jika dan hanya jika $ppb(a/d, b/d) = 1$

   [***Petunjuk***: Gunakan Teorema 2.6]

4. Dengan mengasumsikan bahwa $ppb(a, b) = 1$, buktikan berikut ini:

   (a) $ppb(a + b, a - b) = 1$ atau 2

   [***Petunjuk***: Misalkan $d = ppb(a + b, a - b)$ dan tunjukan bahwa $d \mid 2a$, $d \mid 2b$ dan kemudian bahwa $d \le ppb(2a, 2b) = 2\, ppb(a, b)$

   (b) $ppb(2a + b, a + 2b) = 1$ atau 3

   (c) $ppb(a + b, a^2 + b^2) = 1$ atau 2

   [***Petunjuk***: $a^2 + b^2 = (a + b)(a - b) + 2b^2$]

   (d) $ppb(a + b, a^2 - ab + b^2) = 1$ atau 3

   [***Petunjuk***: $a^2 - ab + b^2 = (a + b)^2 - 3ab$]

5. Buktikan bahwa jika $ppb(a, b) = 1$ maka $ppb(a + b, ab) = 1$
6. Carilah $kpk(143, 227)$, $kpk(306, 657)$ dan $kpk(272, 1479)$
7. Diberikan bilangan-bilangan bulat a dan b yang tidak nol, periksalah fakta-fakta yang berhubungan dengan $kpk(a, b)$ berikut ini.

   (a) $ppb(a, b) = kpk(a, b)$ jika dan hanya jika $a = \pm b$

   (b) jika $k > 0$ maka $kpk(ka, kb) = k\; kpk(a, b)$

   (a) Jika m sembarang kelipatan persekutuan dari a dan b maka $kpk(a, b) \mid m$

   [***Petunjuk***: Misalkan $t = kpk(a, b)$ dan gunakan Algoritma Pembagian untuk menuliskan $m = qt + r$ dengan $0 \le r < t$. Kemudian tunjukkan bahwa r adalah kelipatan persekutuan dari a dan b]

8. Buktikan bahwa pembagi persekutuan terbesar dari dua bilangan bulat positif membagi kelipatan persekutuan terkecilnya
9. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan bulat, dua bilangan diantaranya tidak nol, dan $d = ppb(a, b, c)$. Tunjukkan bahwa

$$d = ppb(ppb(a, b), c) = ppb(a, ppb(b, c)) = ppb(ppb(a, c), b)$$

10. Carilah bilangan bulat x, y, z yang memenuhi

$$ppb(198, 288, 512) = 198x + 288y + 512z$$

   [***Petunjuk***: Misalkan $d = ppb(198,288)$. Karena $ppb(198, 288, 512) = ppb(d, 512)$, pertama cari bilangan bulat u dan v yang memenuhi $ppb(d, 512) = du + 512v$]

2.4 Persamaan Diophantine

Persamaan Diphantine adalah suatu persamaan dalam satu atau lebih variabel yang mempunyai penyelesaian dalam bilangan-bilangan bulat. Pada pembahasan ini kita akan memandang persamaan Diophantine linear dengan dua variabel:

$$ax + by = c$$

di mana koifesien-koifesien a, b dan c adalah bilangan bulat yang tidak keduanya nol. Penyelesaian dari persamaan ini adalah suatu pasangan bilangan bulat x_0, y_0 yang memenuhi persamaan di atas; $ax_0 + by_0 = c$

Teorema 2.8 Persamaan Diophantin $ax + by = c$ mempunyai suatu penyelesaian jika dan hanya jika $d \mid c$ di mana $d = ppb(a, b)$

Teorema 2.9 Jika x_0 dan y_0 adalah solusi partikulir dari persamaan Diophantine $ax + by = c$, maka semua solusi persamaan ini dapat dinyatakan dengan

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t \qquad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$$

di mana $d = ppb(a, b)$ dan t sembarang bilangan bulat

Contoh 5 Perhatikan persamaan Diophantine

$$172x + 20y = 1000$$

Tentukan bilangan - bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan itu.

Jawab

Pertama, terapkan Algoritma Eclid untuk menentukan $ppb(172, 20)$ dan diperoleh

$$172 = 8 \,.\, 20 + 12$$

$$20 = 1 \,.\, 12 + 8$$

$$12 = 1 \,.\, 8 + 4$$

$$8 = 2 \,.\, 4$$

Dengan demikian $ppb(172, 20) = 4$. Kemudian, karena $4 \mid 1000$ maka persamaan Diophantine itu mempunyai penyelesaian. Selanjutnya, dari system pada Algoritma Euclid di atas, nyatakan 4 sebagai kombinasi linear dari 172 dan 20, yaitu sebagai berikut:

$$4 = 12 - 8$$

$$= 12 - (20 - 12)$$
$$= 2 \,.\, 12 - 20$$
$$= 2(172 - 8 \,.\, 20) - 20$$
$$= 2 \,.\, 172 + (-17)20$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari hubungan terakhir ini dengan 250 diperoleh

$$1000 = 250 \,.\, 4 = 250[2 \,.\, 172 + (-17)20]$$
$$= 500 \,.\, 172 + (-4250)20$$

Sehingga solusi partikulir dari persamaan itu adalah $x_0 = 500$ dan $y_0 = -4250$. Semua solusi dari persamaan Diophantine yang diberikan dinyatakan sebagai berikut

$$x = 500 + (20/4)t = 500 + 5t$$
$$y = -4250 - (172/4)t = -4250 - 43t$$

Untuk sembarang bilangan bulat t.

Untuk mendapatkan solusi dalam bilangan bulat positif, t harus dipilih dari system pertidaksamaan di bawah ini

$$5t + 500 > 0 \quad \text{dan} \quad -43t - 4250 > 0$$

atau

$$-100 < t < -98\frac{36}{43}$$

Karena t harus merupakan bilangan bulat, maka nilai t dari pertidaksamaan ini adalah $t = -99$. Dengan demikian, persamaan Diophantine $172x + 20y = 1000$ mempunyai solusi positif $x = 5$ dan $y = 7$ yang berkorespondensi dengan nilai $t = -99$

Latihan 2.4

1. Manakah diantara persamaan Diophantine di bawah ini yang tidak dapat diselesaikan ?
   (a) $6x + 51y = 22$
   (b) $33x + 14y = 115$
   (c) $14x + 35y = 93$
2. Tentukan semua solusi dalam bilangan bulat dari persamaan Diophantine berikut
   (a) $56x + 72y = 40$
   (b) $24x + 138y = 18$
   (c) $221x + 35y = 11$

(d) $158x - 57y = 7$

3. Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat positif yang relatif prime, buktikan bahwa persamaan Diophantine $ax - by = c$ mempunyai solusi dalam bilangan bulat positif yang tak berhingga banyaknya.
4. (a) Buktikan bahwa persamaan Diophantine $ax + by + cz = d$ dapat diselesai-kan dalam bilangan bulat jika dan hanya jika $ppb(a, b, c)$ membagi d

   (b) Carilah semua solusi dalam bilangan bulat dari $15x + 12y + 30z = 24$

BAB III

TEORI KONGRUENSI

3.1 Sifat-sifat Dasar Kongruensi

Definisi 3.1 *Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Dua bilangan bulat a dan b dikatakan kongruen modulo n, dinotasikan dengan*

$$a \equiv b \ (mod\ n)$$

jika n membagi $a - b$; dengan kata lain $a - b = k\,n$ untuk suatu bilangan bulat k

Sebagai contoh, perhatikan untuk $n = 7$, maka

$$3 \equiv 24 \ (mod\ 7) \qquad -31 \equiv 11 \ (mod\ 7) \qquad -15 \equiv -64 \ (mod\ 7)$$

sebab $3 - 24 = (-3)7$, $-31 = 11 = (-6)7$, dan $-15 = (-64) = 7 \,.\, 7$.

Selanjutnya, perhatikan pembagian bilangan bulat a dengan n, dan misalkan q dan r berturut-turut adalah hasil bagi dan sisanya sehingga

$$a = qn + r \qquad\qquad 0 \leq r < n$$

Berdasarkan definisi kongruensi, $a \equiv r \ (mod\ n)$.

Teorema berikut menyatakan karakterisasi kongruensi modulo n dalam pengertian sisa dari pembagian dengan n

Teorema 3.1 *Untuk sembarang bilangan bulat a dan b, $a \equiv b \ (mod\ n)$ jika dan hanya jika a dan b memiliki sisa yang sama apabila dibagi dengan n.*

Contoh 3.1 Karena bilangan bilangan bulat –56 dan –11 dapat dinyatakan dalam bentuk

$$-56 = (-7)9 + 7 \qquad\qquad -11 = (-2)9 + 7$$

dengan sisa yang sama 7, Teorema 3.1 mengatakan bahwa $-56 \equiv -11$ (mod 9). Sebaliknya, kongruensi $-31 \equiv 11$ (mod 7) mengakibatkan bahwa –31 dan 11 mempunyai sisa yang sama apabila dibagi dengan 7; Hal ini jelas dari hubungan

$$-31 = (-5)7 + 4 \qquad\qquad 11 = 1 \,.\, 7 - 4$$

Sifat sifat kongruensi dalam teorema di bawah ini yang perilakunya terhadap pertambahan dan perkalian mengingatkan kita pada kesamaan biasa.

Teorema 3.2. *Misalkan* $n > 1$ *dan* a, b, c, d *sembarang bilangan bulat. Maka berlaku sifat-sifat berikut*:

(a) $a \equiv a \pmod{n}$.

(b) *Jika* $a \equiv b \pmod{n}$ *maka* $b \equiv a \pmod{n}$

(c) *Jika* $a \equiv b \pmod{n}$ *dan* $b \equiv c \pmod{n}$ *maka* $a \equiv c \pmod{n}$

(d) *Jika* $a \equiv b \pmod{n}$ *dan* $c \equiv d \pmod{n}$ *maka* $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ *dan* $ac \equiv bd \pmod{n}$

(e) *Jika* $a \equiv b \pmod{n}$ *maka* $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ *dan* $ac \equiv bc \pmod{n}$

(f) *Jika* $a \equiv b \pmod{n}$ *maka* $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ *untuk sembarang bilangan bulat positif* k

Contoh 3.2 Tunjukkan bahwa 41 membagi $2^{20} - 1$.

Jawab

Kita mulai dengan memperhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
2^5 \equiv -9 \pmod{41} \quad &\Rightarrow (2^5)^4 \equiv (-9)^4 \pmod{41} && \text{(Teorema 3.2(f))} \\
&\Rightarrow 2^{20} \equiv 81 \,.\, 81 \pmod{41} \\
&\Rightarrow 2^{20} \equiv (-1)(-1) \pmod{41} && (81 \equiv -1 \pmod{41}) \\
&\Rightarrow 2^{20} \equiv 1 \pmod{41} \\
&\Rightarrow 2^{20} - 1 \equiv 0 \pmod{41}
\end{aligned}
$$

Pernyataan terakhir mengatakan bahwa 41 membagi $2^{20} - 1$

Contoh 3.3 Tentukan sisa pembagian jumlah dari

$$1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 99! + 100!$$

dengan 12

Jawab

Perhatikan bahwa tanpa bantuan kongruensi, sangat sulit menghitung jumlah bilangan itu. Kita mulai dengan mengamati fakta bahwa $4! \equiv 24 \equiv 0 \pmod{12}$; dengan demikian untuk $k \geq 4$ berlaku

$$k! \equiv 4! \,.\, 5 \,.\, 6 \ldots k \equiv 0 \,.\, 5 \,.\, 6 \ldots k \equiv 0 \pmod{12}$$

Dengan cara seperti ini, kita peroleh bahwa

$$1! + 2! + 3! + 4! + \ldots + 100! \equiv 1! + 2! + 3! + 0 + \ldots + 0 \equiv 9 \pmod{12}$$

Kongruensi ini mengatakan bahwa sisa pembagian jumlah bilangan-bilangan itu dengan 12 adalah 9.

Teorema 3.3. *Jika* $ca \equiv cb \ (mod\ n)$ *maka* $a \equiv b \ (mod\ n/d)$ *di mana* $d = ppb(c, n)$.

Akibat 1 *Jika* $ca \equiv cb \ (mod\ n)$ *dan* $ppb(c, n) = 1$ *maka* $a \equiv b \ (mod\ n)$

Akibat 2 *Jika* $ca \equiv cb \ (mod\ p)$ *dan* $p \mid c$ *di mana* p *bilangan prima maka* $a \equiv b \ (mod\ p)$

Latihan 3.1

1. Buktikan masing-masing pernyataan di bawah ini:
   (a) Jika $a \equiv b \ (mod\ n)$ dan $m \mid n$, maka $a \equiv b \ (mod\ m)$
   (b) Jika $a \equiv b \ (mod\ n)$ dan $c > 0$ maka $ca \equiv cb \ (mod\ n)$
   (c) Jika $a \equiv b \ (mod\ n)$ dan bilangan bulat a, b, n semuanya dapat dibagi dengan $d > 0$ maka $a/d \equiv b/d \ (mod\ n/d)$
2. Berikan contoh untuk menunjukkan bahwa $a^2 \equiv b^2 \ (mod\ n)$ tida perlu mengakibatkan bahwa $a \equiv b \ (mod\ n)$
3. Jika $a \equiv b \ (mod\ n)$, buktikan bahwa $ppb(a, n) = ppb(b, n)$
4. (a) Carilah sisanya apabila 2^{50} dan 41^{65} dibagi dengan 7
   (b) Berapakah sisanya apabila jumlah dari bilangan-bilangan
   $$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + 99^5 + 100^5$$
   dibagi dengan 4
5. Buktikan bahwa $53^{103} + 103^{53}$ dapat dibagi dengan 39, dan bahwa $111^{333} + 333^{111}$ dapat dibagi dengan 7
6. Untuk $n \geq 1$, gunakan teori kongruensi untuk memeriksa pernyataan pembagian di bawah ini
   (a) $7 \mid 5^{2n} + 3 \cdot 2^{5n-2}$
   (b) $13 \mid 3^{n+2} + 4^{2n+1}$
   (c) $27 \mid 2^{5n+1} + 5^{n+2}$
   (d) $43 \mid 6^{n+2} + 7^{2n+1}$
7. Buktikan pernyataan di bawah ini
   (a) Jika a bilangan ganjil maka $a^2 \equiv 1 \ (mod\ 8)$
   (b) Untuk sembarang bilangan bulat a, $a^3 \equiv 0$, 1, atau 6 $(mod\ 7)$
   (c) Untuk sembarang bilangan bulat a, $a^4 \equiv 0$ atau 1 $(mod\ 5)$
   (d) Jika bilangan bulat a tidak membagi 2 atau 3, maka $a^2 \equiv 1 \ (mod\ 24)$

8. Gunakan teori kongruensi untuk memerika bahwa

   $89 \mid 2^{44} - 1$ dan $97 \mid 2^{48} - 1$

9. Buktikan bahwa apabila $ab \equiv cd \ (mod\ n)$ dan $b \equiv d \ (mod\ n)$ dengan $ppb(b, n) = 1$, maka $a \equiv c \ (mod\ n)$.
10. Jika $a \equiv b \ (mod\ n_1)$ dan $a \equiv c \ (mod\ n_2)$, buktikan bahwa $b \equiv c \ (mod\ n)$ di mana bilangan bulat $n = ppb(n_1, n_2)$

3.2 Uji Pembagian

Salah satu penerapan teori kongruensi adalah menentukan kriteria suatu bilangan bulat yang dapat dibagi oleh bilangan bulat lainnya. Kriteria ini didasarkan pada basis dari sistem bilangan yang digunakan untuk bilangan bulat tersebut. Apa yang telah kita lakukan selama ini, basis bilangan yang digunakan adalah basis 10.

Pada sub bab ini kita akan memperkenalkan bagaimana menyatakan suatu bilangan dalam basis yang lainnya, misalkan dalam basis $b > 1$. Untuk itu kita perhatikan teorema berikut

Teorema 3.4. *Sembarang bilangan positif N dapat disajikan secara tunggal dalam bentuk*

$$N = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

dengan $b > 1$ *dan koefesien* $0 \leq a_k < b$

Contoh 3.5 Nyatakan bilangan bulat 105 dalam basis 2 dan sebaliknya, tentukan bilangan bulat yang dalam sistem biner, $(1001111)_2$

Jawab

Bilangan bulat 105 dapat ditulis sebagai

$$105 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1$$

atau dalam bentuk singkat,

$$105 = (1101001)_2$$

Sebaliknya, $(1001111)_2$ dapat ditranslasikan ke dalam bentuk

$$1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 = 79$$

Teorema 3.5 *Misalkan* $P(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ *adalah polinom dengan koefesien bilangan bulat* c_k. *Jika* $a \equiv b \pmod{n}$ *maka* $P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$

Akibat *Jika* a *solusi dari* $P(x) \equiv 0 \pmod{n}$ *dan* $a \equiv b \pmod{n}$ *maka b juga merupakan suatu solusi*

Dua teorema di bawah ini berturut-turut merupakan kriteria untuk menguji suatu bilangan bulat dapat dibagi dengan 9 dan 11.

Teorema 3.6 *Misalkan* $N = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ *bentuk penyajian bilangan bulat positif N dalam sistem desimal*, $0 \le a_k < 10$ *dan misalkan* $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_m$. *Maka* $9 \mid N$ *jika dan hanya jika* $9 \mid S$.

Teorema 3.7 *Misalkan* $N = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ *bentuk penyajian bilangan bulat positif* N *dalam sistem desimal*, $0 \le a_k < 10$ *dan misalkan* $T = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^m a_m$. *Maka* $11 \mid N$ *jika dan hanya jika* $11 \mid T$.

Contoh 3.6 Untuk melihat ilustrasi dua teorema terakhir ini, kita pilih bilangan bulat N = 1.571.724. Karena jumlah

$$1 + 5 + 7 + 1 + 7 + 2 + 4 = 27$$

dapat dibagi dengan 9, maka Teorema 3.6 menjamin bahwa 9 membagi N. Kemudian perhatikan jumlah berganti tanda

$$4 - 2 + 7 - 1 + 7 - 5 + 1 = 11$$

yang dapat dibagi dengan 11. Akibatnya bilangan N itu juga dapat dibagi dengan 11.

Latihan 3.2

1. Buktikan pernyataan-pernyataan berikut:
   (a) Untuk stiap bilangan bulat a, angka satuan dari a^2 adalah 0, 1, 4, 5, 6, atau 9
   (b) Salah satu dari bilangan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dapat menjadi angka satuan dari a^3
   (c) Untuksetiap bilangan bulat a, angka satuan dari a^4 adalah 0, 1, 5, atau 6

2. Tanpa melakukan pembagian, tentukan apakah bilangan 176.521.221 dan 149.235.678 dapat dibagi dengan 9 atau 11.

3. (a) Perumuman Teorema 3.6: Jika bilangan bulat N disajikan dalam basis b dengan

$$N = a_m b^m + \dots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0 \qquad 0 \leq a_k \leq b - 1$$

maka $b - 1 \mid N$ jika dan hanya jika $b - 1 \mid (a_m + \dots + a_2 + a_1 + a_0)$

   (b) Berikan kriteria untuk pembagian N dengan 3 dan 8 yang bergantung pada angka-angka N apabila ditulis dalam basis 9.

   (c) Apakah bilangan $(447836)_9$ dapat dibagi dengan 3 atau 8 ?

4. Kerjakan dengan modulo 9 atau 11 untuk mencari angka-angka yang hilang pada perhitungan di bawah ini.
   (a) $51840 \, . \, 273581 = 1418243x040$
   (b) $2x99561 = [3(523 + x)]^2$
   (c) $2784x = x \, . \, 5569$
   (d) $512 \, . \, 1x53125 = 1000.000.000$

5. Periksalah kriteria pembagian berikut ini.
   (a) Suatu bilangan bulat dapat dibagi dengan 2 jika dan hanya jika angka-angka satuannya adalah 0, 2, 4, 6, atau 8
   (b) Suatu bilangan bulat dapat dibagi dengan 3 jika dan hanya jika jumah angka-angka satuannya dapat dibagi dengan 3
   (c) Suatu bilangan bulat dapat dibagi dengan 4 jika dan hanya jika bilangan yang dibentuk oleh angka puluhan dan satuan dapat dibagi dengan 4.
   (d) Suatu bilangan bulat dapat dibagi dengan 5 jika dan hanya jika angka-angka satuannya adalah 0 atau 5

6. Untuk sembarang bilangan bulat a, tunjukkan bahwa angka terakhir dari $a^2 - a + 7$ adalah salah satu dari angka-angka 3, 7 atau 9.

7. Carilah sisanya apabila 4444^{4444} dibagi dengan 9

8. Dengan mengasumsikan bahwa 495 membagi $273x49y5$, tentukan angka-angka x dan y

9. Tentukan angka terakhir dari bilangan 7^{999}
   [*Petunjuk*: Latihan 1(a)]

10. Carilah nilai-nilai $n \geq 1$ sehingga $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ merupakan bilangan kuadrat sempurna.

11. Misalkan $N = a_m 10^m + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$ di mana $0 \le a_k \le 9$ adalah ekspansi desimal dari suatu bilangan bulat positif N.

   (a) Buktikan bahwa 7, 11 dan 13 semuanya membagi N jika dan hanya jika 7, 11 dan 13 membagi bilangan bulat

   $$M = (100a_0 + 10a_1 + a_0) - (100a_5 + 10a_4 + a_3) + (100a_8 + 10a_7 + a_6) - \ldots$$

   (b) Buktikan bahwa 6 membagi N jika dan hanya jika 6 membagi bilangan bulat

   $$M = a_0 + 4a_1 + 4a_2 + \ldots + 4a_m$$

12. Tanpa melakukan pembagian, tentukan apakah bilangan bulat 1.010.908.899 dapat dibagi dengan 7, 11 dan 13

3.3 Kongruensi Linear

Seperti halnya dalam persamaan biasa, persamaan kongruensi linear adalah persamaan berbentuk $ax \equiv b \pmod{n}$. Sedangkan solusi dari persamaan ini adalah bilangan bulat x_0 yang memenuhi $ax_0 \equiv b \pmod{n}$. Berdasarkan definisi kongruensi, $ax_0 \equiv b \pmod{n}$ jika dan hanya jika $ax_0 - b = ny_0$ untuk suatu bilangan bulat y_0. Dengan demikian, masalah mencari solusi persamaan kongruensi linear $ax \equiv b \pmod{n}$ identik dengan mencari semua solusi dari persamaan Diophantin linear $ax - ny = b$. Dengan demikian, solusi persamaan kongruensi linear adalah tidak tunggal.

Mengingat solusi dari persamaan Diophantin linear adalah tak berhingga banyaknya, bagaimanakah halnya dengan solusi persamaan kongruensi linear ? Untuk itu kita perhatikan persamaan kongruensi linear

$$3x \equiv 9 \pmod{12}$$

$x = 3$ dan $x = -9$ keduanya memenuhi persamaan kongruensi tersebut, tetapi kedua solusi itu kongruen modulo 12, $3 \equiv -9 \pmod{12}$. Kita katakan bahwa kedua solusi itu adalah "sama" (bukan dua solusi yang berbeda) meskipun keduanya berbeda dalam pengertian persamaan biasa. Oleh karena itu, untuk mencari banyaknya solusi yang berbeda dari persamaan kongruensi linear, kita harus mencari solusi-solusi yang tidak kongruen yang memenuhi persamaan kongruensi itu.

Teorema di bawah ini memberikan suatu kondisi agar persamaan kongruensi linear mempunyai solusi.

Teorema 3.8 *Persamaan kongruensi linear* $ax \equiv b \pmod{n}$ *mempunyai solusi jika dan hanya jika* $d \mid b$ *di mana* $d = ppb(a, n)$. *Kemudian, jika* $d \mid b$ *maka terdapat* d *banyaknya solusi yang tidak saling kongruen modulo* n.

Akibat *Jika* $ppb(a, n) = 1$ *maka kongruensi linear* $ax \equiv b \pmod{n}$ *mempunyai tepat satu solusi modulo* n

Contoh 3.7 Tentukan solusi dari kongruensi linear

$$18x \equiv 30 \pmod{42}$$

Jawab

Karena ppb(18, 42) = 6 dan 6 membagi 30, maka berdasarkan teorema 3.8 terdapat 6 solusi modulo 42. Kita dapat mencobanya bahwa $x = 4$ merupakan salah satu solusinya. Dengan demikian keenam solusi itu adalah

$$x \equiv 4 + (42/6)t \equiv 4 + 7t \pmod{42} \quad t = 0, 1, \ldots 5$$

atau

$$x \equiv 4, 11, 18, 25, 32, 39 \pmod{42}$$

Teorema 3.8 Misalkan $n_1, n_2, \ldots, n_r$ adalah bilangan bulat positif sehingga $ppb(n_i, n_j) = 1$ $i \neq j$. Maka system kongruensi linear

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_r \pmod{n_r} \end{aligned}$$

mempunyai tepat satu solusi modulo $n_1.n_2 \ldots n_r$

Latihan 3.3

1. Selesaikan kongruensi linear di bawah ini:
   a. $25x \equiv 15 \pmod{29}$
   b. $5x \equiv 2 \pmod{26}$
   c. $6x \equiv 15 \pmod{21}$
   d. $36x \equiv 8 \pmod{102}$
2. Gunakan kongruensi untuk menyelesaikan persamaan Diophantine di bawah ini:

a. $4x + 51y = 9$

[Petunjuk : $41 \equiv 9 \pmod{51}$ menghasilkan $x = 15 + 51t$, sedangkan $51y \equiv 9 \pmod{4}$ menghasilkan $y = 3 + 4s$. Carilah hubungan antara s dan t

b. $12x + 25y = 331$

c. $5x - 53y = 17$

3. Selesaikan system kongruensi linear di bawah ini:

a. $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$

b. $x \equiv 5 \pmod{11}$, $x \equiv 14 \pmod{29}$, $x \equiv 15 \pmod{31}$

c. $x \equiv 5 \pmod{5}$, $x \equiv 4 \pmod{11}$, $x \equiv 3 \pmod{17}$

d. $x \equiv 1 \pmod{3}$, $x \equiv 2 \pmod{5}$, $x \equiv 3 \pmod{7}$

e. $2x \equiv 1 \pmod{5}$, $3x \equiv 9 \pmod{6}$, $4x \equiv 1 \pmod{7}$, $5x \equiv 9 \pmod{11}$

4. Selesaikan kongruensi linear $17x \equiv 3 \pmod{2.3.5.7}$ dengan menyelesaikan system

$$17x \equiv 3 \pmod{2} \qquad 17x \equiv 3 \pmod{3}$$
$$17x \equiv 3 \pmod{5} \qquad 17x \equiv 3 \pmod{7}$$

5. Carilah dua solusi yang tidak saling kongruen modulo 210 dari system

$$2x \equiv 3 \pmod{5}$$
$$4x \equiv 2 \pmod{6}$$
$$3x \equiv 2 \pmod{7}$$

6. Carilah solusi dari system kongruensi:

$$3x + 4y \equiv 5 \pmod{13}$$
$$2x + 5y \equiv 7 \pmod{13}$$