PEMBINAAN TAHAP I CALON SISWA

INVITATIONAL WORLD YOUTH MATHEMATICS INTERCITY COMPETITION (IWYMIC) 2010

MODUL

ALJABAR

DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

DIREKTORAT PEMBINAAN SMP

2010

ALJABAR

A. PERSAMAAN

Hal yang paling mendasar dari persamaan adalah bagaimana mencari solusi dari persamaan itu. Metode eliminasi dan substitusi merupakan cara yang banyak digunakan untuk menyelesaikan/mencari solusi dari sistem persamaan dengan dua atau tiga variable.

Berikut ini disajikan beberapa ilustrasi bagaimana proses eliminasi atau substitusi dilakukan dalam menyelesaikan sistem persamaan yang muncul dalam soal-soal IWYMIC.

CONTOH DAN PEMBAHASAN

Contoh 1 [IWYMIC 2008] Misalkan $(\ ) = \quad -$, di mana bilangan a dan c adalah bilangan real yang memenuhi $-4 \leq (1) \leq 1$ dan $-1 \leq (2) \leq 2$. Berapa nilai maksimum dari *f* (8)?

Pembahasan

Karena $f(x) = ax^2 - c$, maka

$$f(1) = a - c \quad \text{dan} \quad f(2) = 4a - c$$

Dengan menggunakan metode substitusi atau eliminasi kita akan memperoleh

$$a = \frac{(\ ) \qquad (\ )}{\qquad} \quad \text{dan} \quad c = \frac{(\ ) \qquad (\ )}{\qquad}$$

Dengan demikian, nilai dari $f(8)$ dapat dinyatakan dalam $f(1)$ dan $f(2)$ seperti berikut ini

$$f(8) = 64a - c = 21\, f(2) - 20\, f(1).$$

Karena $-4 \leq \ (1) \leq 1$ dan $-1 \leq \ (2) \leq 2$, maka nilai maksimum dari $f(8)$ adalah 21 (2) – 20 (-4) = 122

Contoh 2 [**IWYMIC 2005**] Misalkan x, y dan z adalah bilangan positif sehingga

$$\begin{cases} x + y + xy = 8, \\ y + z + yz = 15, \\ z + x + zx = 35. \end{cases}$$

Carilah nilai dari $x+y+z+xy$.

Pembahasan

Perhatikan persamaan pertama dari system di atas:

$$\begin{aligned} x + y + xy = 8 \quad &\Leftrightarrow x(1 + y) + y = 8 \\ &\Leftrightarrow x(1 + y) + (y + 1) = 9 \\ &\Leftrightarrow (y + 1)(x + 1) = 9 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama persamaan kedua dan ketiga akan menjadi

$$(1 + y)(1 + z) = 16 \text{ dan } (1 + z)(1 + x) = 36$$

Dari sini kita akan memperoleh

$$x + 1 = \text{——} = 9 \, . \text{——} = \text{—} \, . \text{——}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 1)^2 = 81/4.$$

Karena x bilangan positif, maka $x + 1 = 9/2$ atau $x = 7/2$.

Dengan menggunakan proses yang serupa, kita akan memperoleh nilai $y = 1$ dan $z = 7$. Dengan demikian, nilai dari

$$x + y + z + xy = 7/2 + 1 + 7 + 7/2 = 15$$

Contoh 3 [**IWYMIC 2006**] Bilangan a, b, c, d, x, y dan z semuanya tidak nol sehingga $- = - = -.$ Berapa nilai dari

$$\frac{(\quad)(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)(\quad)}?$$

Pembahasan

Untuk mencari nilai pecahan di atas, kita nyatakan pecahan itu. dalam satu variable, misalnya z. Oleh karena itu, kita memperoleh

$$x = -\,z \qquad \text{dan} \qquad y = -\,z$$

Sehingga $x + y = \frac{\quad}{\quad} z$, $y + z = \frac{\quad}{\quad} z$ dan $z + x = \frac{\quad}{\quad} z$.

Dengan demikian, nilai dari

$$\frac{(\quad)(\quad)(\quad)}{(\quad)(\quad)(\quad)} = \frac{\quad}{\quad}\ \frac{\quad}{(\quad)\ /}\ \frac{\quad}{(\quad)\ /}\ \frac{\quad}{(\quad)\ /}$$

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

= 1

LATIHAN SOAL

1. [IWYMIC 2005] Misalkan *a* adalah bilangan real positif sehingga $a^2 + \frac{1}{a^2} = 5$, tentukan nilai dari $a^3 + \frac{1}{a^3}$.
2. [IWYMIC 2008] Misalkan *a*, *b* dan *c* adalah real sehingga $a + b + c$ = 11 dan $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{13}{17}$. Berapakah nilai dari $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$?
3. [IWYMIC 2006] Tentukan nilai dari $x + y$ di mana x dan y adalah bilangan real sehingga $(2x+1)^2 + y^2 + (y-2x)^2 = \frac{1}{3}$.
4. [IWYMIC 2004] Misalkan a, b, c alah bilangan real yang memenuhi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ dan $a^3 + b^3 + c^3 = 1$. Carilah semua nilai yang

mungkin dari $a + b + c$

5. [IWYMIC 2005] Misalkan a, b dan c adalah bilangan real sehingga $a + bc = b + ca = c + ab = 501$. Jika M adalah nilai maksimum dari $a + b + c$ dan m adalah nilai minimum dari $a + b + c$. Tentukan nilai dari $M + 2m$.
6. Carilah semua bilangan real yang memenuhi persamaan

$$|x + 3| - |x - 1| = x + 1$$

7. Bilangan a, b, dan c memenuhi persamaan

$$a^2 + 2b = 7,\ b^2 + 4c = -7,\ c^2 + 6a = -14.$$

Tentukan nilai dari $a^2 + b^2 + c^2$

8. [IWYMIC 2002] Selesaikan untuk x, y dan z dari system persamaan:

$$(x + y)(x + z) = 15$$

$$(y + z)(y + x) = 18$$

$$(z + x)(z + y) = 30.$$

B. FUNGSI KUADRAT

a. Akar Persamaan Kuadrat

Perhatikan persamaan kuadrat: $ax^2 + bx + c = 0$.

Akar dari persamaan kuadrat itu dapat dicari dengan aturan yang diturunkan sebagai berikut:

$$+ - \quad + - \quad = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad + - - \quad = - +$$

$$\Leftrightarrow \quad + - \quad = -$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{}}{}$$

Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Maka persamaan itu dapat dituliskan dalam bentuk:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Contoh 4. Misalkan α adalah akar terbesar dari persamaan kuadrat $(2009x)^2 - 2008 \cdot 2010x - 1 = 0$, dan β adalah akar terkecil dari $x^2 + 2008x - 2009 = 0$. Tentukan nilai dari α – β

Pembahasan

Persamaan pertama dapat difaktorkan menjadi

$$(2009^2x + 1)(x - 1) = 0 \quad \text{sehingga} \quad \alpha = 1$$

Sedangkan persamaan kedua difaktorkan menjadi

$$(x - 1)(x + 2009) = 0 \quad \text{sehingga} \quad \beta = -2009$$

Dengan demikian, α – β = 2010

b. Nilai Maksimum dan Minimum

Perhatikan fungsi kuadrat: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Fungsi itu dapat diubah ke dalam bentuk yang lebih mudah untuk dikenali dengan cara sebagai berikut:

$$(\ ) = \quad + - \quad + -$$

$$= \quad + - - \quad - - +$$

$$= \quad + - \quad - -$$

Dengan demikian, $(\ ) = \quad - (\frac{}{2})^2 + \frac{}{-4}$

Nilai dari f(x) akan mencapai maksimum atau minimum di —

untuk $= - -$.

- Apabila nilai $a > 0$, maka $- -, -$ merupakan titik minimum (mengapa ?).

- Apabila nilai a < 0, maka $-\frac{\ }{\ }, \frac{\ }{\ }$ merupakan titik maksimum (mengapa ?).

Contoh 5 [**IWYMIC 2008**] Misalkan x adalah bilangan real.

Berapakah nilai maksimum dari $\sqrt{2008 - x} + \sqrt{x - 2000}$?

Pembahasan

Misalkan $y = \sqrt{2008 - x} + \sqrt{x - 2000}$. Perhatikan nilai dari

$$= 8 + 2\ \overline{(2008 - \ )(\ - 2000)}$$

Nilai y akan mencapai maksimum apabila y^2 mencapai maksimum. Sedangkan nilai maksimum dari y^2 ditentukan oleh nilai maksimum dari suku di dalam tanda akar. Karena suku ini merupakan bentuk kuadrat:

$$-x^2 + 4008x – 2008.2000$$

dengan koefesien x^2 bernilai negatif, maka nilai maksimumnya dapat dicari dari koordinat titik puncaknya. Cara lain (mengingat bilangannya terlalu besar) dapat dilakukan dengan memperhatikan hasil kali dua suku sebelumnya. Hasil kali itu akan mencapai nilai maksimum apabila kedua suku itu sama, sehingga diperoleh x = 2004 dengan nilai maksimum 16. Dengan demikian, nilai maksimum dari y adalah

$$\overline{8 + 2\sqrt{16}} = 4$$

LATIHAN SOAL

1. [IWYMIC 2006] Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif sehingga $\sqrt{m - 174} + \sqrt{m + 34}$ = n. Tentukan nilai minimum dari n.
2. Untuk nilai b berapakah persamaan $2009x^2 + bx + 9002 = 0$ dan persamaan $9002x^2 + bx + 2009 = 0$ memiliki akar yang sama ?

3. Misalkan x, y dan z adalah bilangan real. Tentukan bilangan real z terbesar sehingga

$$x + y + z = 5$$

$$xy + yz + xz = 3$$

4. [IWYMIC 2004] Tentukan nilai minimum dari pernyataan $x^2 + y^2 + 5z^2 - xy - 3yz - xz + 3x - 4y + 7z$, di man x, y, dan z adalah bilangan real

C. BILANGAN BERPANGKAT

Pengertian bilangan berpangkat adalah bilangan berbentuk

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a \quad (a \text{ sebanyak } n \text{ faktor})$$

Berdasarkan pengertian ini, kita dapat dengan mudah menurunkan sifat-sifat dasar bilangan berpangkat berikut ini:

1. $a^m \times a^n = (a)^{m+n}$
2. $a^m : a^n = (a)^{m-n}$
3. ( ) = ( ) a^m
4. $a^m \times b^m = (a \times b)^m$
5. – =
6. $\sqrt{}$ = ( )
7. $\overline{\sqrt{}}$ = $\sqrt{}$ = ( )
8. $\sqrt{} \times \sqrt{} = \sqrt{}$
9. = atau =

Dengan menggunakan pengertian bilangan berpangkat dan sifat-sifat dasarnya, pernyataan di bawah ini dapat diperlihatkan bahwa

a. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Contoh 6 [**IWYMIC 2002**] Misalkan $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ di mana a, b, c and d adalah konstanta. Jika P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30, maka berapakah nilai dari P(10) + P(-6)?

Pembahasan

P(1) = 10 $\Leftrightarrow$ $a + b + c + d = 9$ (1)

P(2) = 20 $\Leftrightarrow$ $8a + 4b + 2c + d = 4$ (2)

P(3) = 30 $\Leftrightarrow$ $27a + 9b + 3c + d = -51$ (3)

Dari (1) dan (2), (2) dan (3) berturut-turut diperoleh

$$7a + 3b + c = -5$$
$$19a + 5b + c = -55$$

Dari dua persamaan ini diperoleh: $12a + 2b = -50$ atau $b = -6a - 25$

Untuk b itu diperoleh $c = 11a + 70$ dan $d = -6a - 36$.

Jadi, P(10) + P(-6) = $10^4 + 6^4 + a(10^3 - 6^3) + b(10^2 + 6^2) + c\,(10 - 6) + 2d$

= 11296+784a+136(-6a–25)+4(11a+70)+2(-6a–36)

= 11296+784a –816a+44a–12a – 3400+280–72

= 11296 – 340 + 280 – 72

= 11988

LATIHAN SOAL

1. [IWYMIC 2002] Untuk mencari nilai dari x^8 dengan diberikan nilai *x*,kamu memerlukan tiga operasi aritmetika: $x^2 = x \cdot x$, $x^4 = x^2 \cdot x^2$ dan $x^8 = x^4 \cdot x^4$. Untuk mencari x^{15}, lima operasi akan dilakukan: tiga operasi pertama adalah sama; kemudian $x^8 \cdot x^8 = x^{16}$ dan $x^{16} \div x = x^{15}$. Paling sedikit berapa banyak operasi (perkalian dan pembagian) akan dilakukan untuk menghitung x^{1000} ?
2. Misalkan $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$, dan $8^f = 9$. Tentukan nilai dari abcdef
3. Nilai k yang memenuhi persamaan $4^{k+1} . 5^{k-1} = 1/500$ adalah
4. Diberikan persamaan $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$. Berapa banyaknya solusi bilangan bulat x yang memenuhi persamaan tersebut ?

D. BENTUK AKAR

Hal yang paling mendasar dalam bentuk akar adalah proses menyederhanakan pernyataan yang memuat bentuk akar. Sebagai ilustrasi, perhatikan bentuk akar di bawah ini

$$\overline{27 + 8\sqrt{11}}$$

Bentuk akar itu dapat disederhanakan menjadi $4 + \sqrt{11}$ (mengapa ?). Untuk melihat kebenaran pernyataan itu secara umum dapat diturunkan dengan memperhatikan bentuk akar $\sqrt{\ } + \sqrt{\ }$. Apabila bilangan ini dikuadratkan diperoleh:

$$\sqrt{\ } + \sqrt{\ } \quad = (\ \ + \ \ ) + 2\sqrt{\ \ \ }$$

Dengan demikian, $\overline{(\ \ + \ \ ) + 2\sqrt{\ \ \ }} = \sqrt{\ } + \sqrt{\ }$.

Untuk pengurangannya pun berlaku hal yang sama (silahkan turunkan !). Di samping itu, sangat sering ditemui suatu bilangan pecahan dengan penyebut memuat bentuk akar. Untuk itu kita perlu merasionalkan pernyebut itu dengan mengalikan pecahan itu dengan pecahan bernilai 1 yang pembilang dan penyebutnya merupakan bentuk sekawan dari bentuk akar dalam penyebut itu. Misalkan kita akan merasionalkan penyebut dalam pecahan

$$\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5} - 3}$$

Proses penyederhanaannya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }} = \frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }} \ \frac{\sqrt{\ }}{\sqrt{\ }}$$

$$= \frac{\sqrt{\ \ \ }\quad \sqrt{\ }}{\ }$$

Jadi bentuk sederhana pecahan di atas adalah — $2\sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

CONTOH DAN PEMBAHASAN

Contoh 7 [**IWYMIC 2002**] Jika $x = \frac{(\quad)\ (\quad)}{(\quad)(\quad)}$, berapakah nilai dari $bx^2 - ax + b$?

Pembahasan

Pertama, sederhanakan dulu nilai dari x itu dengan sekawannya, yaitu

$$x = \frac{(\quad)\ (\quad)}{(\quad)(\quad)} \cdot \frac{(\quad)\ (\quad)}{(\quad)(\quad)}$$

$$= \frac{(\quad)\ (\quad)\ (\quad)(\quad)}{(\quad)\ (\quad)}$$

$$= \frac{\sqrt{\quad}}{\quad}$$

Sekarang perhatikan bahwa dengan menggunakan aturan mencari akar persamaan kuadrat, nilai x itu merupakan akar dari $bx^2 - ax + b = 0$. Dengan demikian, nilai dari $bx^2 - ax + b$ adalah 0.

Contoh 8 Sederhanakan pernyataan berikut ke dalam sebuah bilangan yang tunggal

$$\sqrt{12 - \sqrt{24} + \sqrt{39} - \sqrt{104}} - \sqrt{12 + \sqrt{24} + \sqrt{39} + \sqrt{104}}$$

Pembahasan

Misal $y = \sqrt{12 + \sqrt{39} - (\sqrt{24} + \sqrt{104})} - \sqrt{12 + \sqrt{39} + (\sqrt{24} + \sqrt{104})}$

maka $y^2 = 24 + 2\sqrt{39} - 2\sqrt{12 + \sqrt{39} - \sqrt{24} + \sqrt{104}}$

$= 24 + 2\sqrt{39} - 2\sqrt{55 + 8\sqrt{39}}$

$= 24 + 2\sqrt{39} - 2\sqrt{16 + 39 + 2\sqrt{16 . 39}}$

$= 24 + 2\sqrt{39} - 2(\sqrt{16} + \sqrt{39})$

$= 16$

Jadi nilai bilangan itu adalah -4 (mengapa ?)

SOAL LATIHAN

1. Hitunglah nilai dari $\frac{}{\sqrt{} \quad \sqrt{} \quad \sqrt{} \quad (\quad \sqrt{})}$

2. Hasil penjumlahan bilangan bulat antara $\sqrt{2010}$ dan $\sqrt{2010}$ adalah

3. Nilai maksimum dari f(x) = $-$ adalah . . .

4. Jika $x^2 + 1/x^2 = 47$, maka $\sqrt{x} + 1/\sqrt{x} = . . .$

5. Tentukan nilai dari $\frac{}{\sqrt{} \; \sqrt{}} + \frac{}{\sqrt{} \; \sqrt{}} + \frac{}{\sqrt{} \; \sqrt{}} + \ldots + \frac{}{\sqrt{} \; \sqrt{}}$