PEMBINAAN TAHAP I CALON SISWA

INVITATIONAL WORLD YOUTH MATHEMATICS INTERCITY COMPETITION (IWYMIC) 2010

MODUL

BILANGAN

DIREKTORAT JENDERAL MANAJEMEN PENDIDIKAN DASAR DAN MENENGAH

DIREKTORAT PEMBINAAN SMP

2010

BILANGAN

A. FAKTORISASI PRIMA

Bilangan prima memegang peranan penting dalam pemfaktoran suatu bilangan bulat. Untuk sembarang bilangan bulat selalu dapat dinyatakan dalam bentuk faktorisasi prima. Misalkan n bilangan bulat, maka kita selalu dapat mencari bilangan prima $p_1, p_2, \ldots, p_r$ sehingga

n = ...

Sebagai contoh perhatikan bilangan bulat 504. Faktorisasi prima dari bilangan itu adalah

$$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Banyak aplikasi dan pemamfaatan dari faktorisasi prima ini dalam menyelesaikan soal-soal pada kompetisi matematika,baik tingkat nasional maupun internasional. Beberapa di antaranya, kita dapat menentukan semua faktor positif dari 504 dengan mudah. Bahkan banyaknya faktor positif dari 504 dapat ditentukan dengan mudah tanpa harus mendaftarkan semua faktor-faktornya.

Di bawah ini disajikan beberapa contoh soal IWYMIC yang diselesaikan dengan mudah dengan bantuan faktorisasi prima.

Contoh 1 [IWYMIC 2007] Jumlah 2008 bilangan bulat positif berurutan merupakan suatu bilangan kuadrat sempurna. Berapakah bilangan terbesar dari bilangan-bilangan bulat tersebut dari bentuk kuadrat sempurna yang terkecil ?

Pembahasan

Misalkan a adalah bilangan terkecil dari bilangan-bilangan bulat tersebut. Maka

$$a+(a+1)+(a+2)+\ldots+(a+2007) = 2008a + \tfrac{1}{2}\,2007(1 + 2007)$$
$$= 2^2 \times 251 \times (2a+2007)$$

Agar bilangan itu berbentuk kuadrat sempurna, kita harus memiliki

$$2a+2007=251n^2$$

untuk suatu bilangan bulat positf n. Untuk n = 1 or 2, nilai a adalah negatif. Untuk n = 3, kita memperoleh a = 126. Dengan demikian, untuk n = 3 akan diperoleh bilangan bentuk kuadrat terkecil dari jumlah ke-2008 bilangan bulat, dengan a+2007 = 2133 merupakan bilangan bulat terbesarnyal.

Contoh 2 [IWYMIC 2008] Bila angka ribuan dari suatu bilangan kuadrat sempurna dengan empat angka dikurangi dengan 3, dan angka satuannya ditambah dengan 3, hasilnya merupakan bilangan kuadrat sempurna dengan empat angka yang lainnya. Berapakah bilangan kuadrat sempurna mula-mula ?

Pembahasan

Misalkan bilangan kuadrat sempurna itu adalah N^2 = $abcd$. Agar tidak memberikan kesan perkalian diantara keempat variable itu, kita dapat menyatakan N^2 dalam bentuk berikut:

$$N^2 = 1000a + 100b + 10c + d$$

Misalkan pula bilangan kuadrat baru itu adalah M^2, maka

$$M^2 = 1000(a - 3) + 100b + 10c + (d + 3)$$

$$= 1000a + 100b + 10c + d - 3000 + 3$$

Dengan demikian, $N^2 - M^2 = 2997$ atau

$$(N + M)(N - M) = 3^4 \,.\, 37$$

Karena bilangan N < 100 dan M < 100, maka N + M < 200. Dari sini kita memperoleh semua pasangan yang mungkin nilai dari N + M dan N – M, yaitu N + M = 3^4 dan N – M = 37, N + M =

$$\begin{array}{lcl} + \quad = 3 & \qquad\qquad & + \quad = 3\,.\,37 \\ - \quad = 37 & & - \quad = 3 \end{array}$$

Untuk kemungkinan pertama diperoleh N = 59 dan M = 22, sehingga N^2

= 3481. Tetapi bilangan ini tidak diharapkan (mengapa ?).

Untuk kemungkinan kedua diperoleh N = 69 dan M = 42, sehingga N^2 = 4761. Bilangan ini telah memenuhi kondisi yang diberikan. Dengan demikian, bilangan kuadrat sempurna mula-mula adalah 4761.

LATIHAN SOAL

1. [IWYMIC 2005] Bilangan bulat positif x dan x + 99 merupakan bilangan kuadrat sempurna. Carilah jumlah semua nilai dari bilangan bulat x tersebut.

2. [IWYMIC 2000] Misalkan a, b, c adalah bilangan bulat positif sehingga a dan b merupakan bilangan dengan tiga angka, dan c merupakan bilangan dengan empat angka. Jika jumlah dari angka-angka $a + b$, $b + c$ dan $c + a$ sama dengan 2, carilah jumlah terbesar yang mungkin dari angka-angka dalam bilangan $a + b + c$.

B. POLA BILANGAN

Susunan bilangan yang mengikuti pola tertentu dikelompokkan ke dalam tiga pola berikut:

a. Pola Bilangan Aritmetika

Pada pola bilangan (barisan) aritmetika, suku berikutnya diperoleh dengan cara menambahkan bilangan yang tetap b misalnya, pada suku sebelumnya. Misalkan suku pertama pola bilangan ini adalah a, maka suku-suku berikutnya berpola sebagai berikut:

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ \ldots,\ a+(n-1)b \qquad (1)$$

Untuk memperoleh hasil penjumlahan dari barisan sampai suku ke-n, kita misalkan jumlahnya adalah Sn,

$$a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + \ldots + (a+(n-1)b) = S_n \qquad (2)$$

Sekarang tuliskan S_n dalam urutan dibalik seperti berikut ini:

$$(a+(n-1)b) + (a+(n-2)b) + \ldots (a+2b) + (a+b) + a = S_n \qquad (3)$$

Apabila kita menjumlahkan (2) dengan (3), maka kita memperoleh

$$2S_n = 2a + (n - 1)b + 2a + (n - 1)b + \ldots + 2a + (n - 1)b$$
$$= n(2a + (n - 1)b)$$

Dengan demikian,

$$S_n = ½\, n[2a + (n - 1)b]$$

Contoh 3. Perhatikan pola bilangan di bawah ini

1 + 2 = 3

4 + 5 + 6 = 7 + 8

9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15

dst

Jumlah bilangan (ruas kiri atau ruas kanan) yang terdapat pada baris ke-10 dapat dicari dengan memperhatikan pola suku pertama pada masing-masing baris, yaitu, 1, 4, 9, 16, . . . atau 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, . . . Dengan demikian, pada baris ke-10,

suku pertamanya adalah 10^2.

Untuk menentukan banyaknya suku pada dalam baris ke -10, perhatikan pola banyaknya suku ruas kiri pada masing-masing baris, yaitu 2, 3, 4, . . Jadi banyaknya suku ruas kiri pada baris ke-10 adalah 11. Dengan demikian, jumlah bilangan (ruas kiri) yang terdapat pada baris ke-10 adalah

$$½ \,.\, 11[2.100 + (11 - 1)\, 1] = 1155$$

b. Pola Bilangan Geometri

Di dalam pola bilangan geometri, suku ke-n diperoleh dengan mengalikan suku sebelumnya dengan suatu bilangan yang tetap, r misalnya. Apabila suku pertamanya a, maka suku-suku berikutnya dalam barisan geometri menjadi,

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3, \ldots,\ ar^{n-1} \qquad (4)$$

Untuk mencari jumlah semua suku dari barisan geometri (4), misalkan

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} \qquad (5)$$

Selanjutnya kita kalikan kedua ruas persamaan (5) itu dengan r dan diperoleh

$$r\,S_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \; . \; . \; , + ar^n \qquad (6)$$

Apabila persamaan (6) dikurangi dengan persamaan (5), maka hasilnya adalah

$$(r - 1)\,S_n = ar^n - a = a(r^n - 1)$$

Denga demikian, jumlah sampai suku ke-n dari barisan geometri adalah

$$S_n = \frac{(}{\quad}$$

Sebagai ilustrasi penggunaan rumus ini, perhatikan contoh berikut:

Contoh 4 Tentukan jumlah semua faktor positif dari 432

Pembahasan

Faktorisasi prima dari bilangan 432 adalah $2^4 . 3^3$.

Faktor-faktor dari 2^4 adalah $\{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4\}$

Faktor-faktor dari 3^3 adalah $\{1, 3, 3^2, 3^3\}$

Untuk menghitung jumlah semua faktor positf dari 432 dapat dicari dengan cara sebagai berikut: perhatikan bilangan

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)(1 + 3 + 3^2 + 3^3)$$

Suku-suku dalam hasil kali jumlah kedua barisan itu memuat semua factor dari 432. Dengan demikian, jumlah semua factor dari 432 adalah

$$\frac{\quad}{\quad} . \frac{\quad}{\quad} = 31 . 40 = 1240$$

Contoh 5 **[IWYMIC 2005]** Misalkan

$$a = 9\left[n\left(\frac{10}{9}\right)^n - 1 - \left(\frac{10}{9}\right) - \left(\frac{10}{9}\right)^2 - \cdots - \left(\frac{10}{9}\right)^{n-1}\right]$$

di mana n adalah bilangan bulat positif. Jika a bilangan bulat, tentukan nilai maksimum dari a

Pembahasan

Perhatikan $1+\left(\frac{10}{9}\right)+\left(\frac{10}{9}\right)^2+....+\left(\frac{10}{9}\right)^{n-1}=\frac{((\frac{10}{9})^n-1)}{(\frac{10}{9}-1)}=9((\frac{10}{9})^n-1)$.

Dari sini kita memiliki

$$a = 9 \quad \frac{}{} \quad -9 \quad \frac{}{} \quad -1 \quad = 9(\mathrm{n}-9) \frac{}{} \quad + 81$$

Karena a bilangan bulat, maka haruslah nilai n = 9 atau n = 1. Dengan demikian, nilai a = 81 atau a = 9. Sehingga nilai maksimum dari a adalah 81.

c. Pola Bilangan Manipulatif

Sangat sering ditemui soal-soal dalam kompetisi matematika, suatu pola bilangan yang tidak mengikuti pola pada kedua barisan yang telah dibahas. Untuk menghitung suku-suku ke-n atau jumlah sampai suku ke-n dituntut kemampuan siswa dalam memanipulasi suku-suku itu sehingga terbentuk suatu pola bilangan yang mudah dikenali dalam menghitungnya. Berikut ini contoh pola bilangan tersebut

Contoh 6 Hitunglah nilai dari $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + . . . + 2009^2 - 2010^2$

Pembahasan

$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + . . . + 2009^2 - 2010^2$

$= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + . . . + (2009^2 - 2010^2)$

$= (1 - 2)(1 + 2) + (3 - 4)(3 + 4) + . . . + (2009 - 2010)(2009 + 2010)$

$= -1(1 + 2) -1(3 + 4) + . . . -1(2009 + 2010)$

$= -1(1 + 2 + 3 + 4 + . . . + 2009 + 2010)$

$= -1 \frac{}{} (1 + 2010)$

$= -1005 . 2011$

$= -2021055$

Contoh 7 Hitung nilai dari A = $\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\cdots+\frac{1}{99990000}$

Pembahasan

A = $\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\cdots+\frac{1}{99990000}$

= — + — + — + ... + ——

= – – – + – – – + – – – + ... + — – —

= – – ——

= ——

LATIHAN SOAL

1. Sederhanakan . . . . / .

2. Perhatikan bilangan di bawah ini

   – = – + – ; – = – + –; – = – + —; – = – + —

   Nyatakan secara umum aturan yang disarankan dari contoh itu, kemudian buktikan.

3. [WYMIC 1999] Hitunglah nilai dari:

   $1999^2 - 1998^2 + 1997^2 - 1996^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.

4. Hitung penjumlahan dari $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\ . \ . \ . +\frac{1023}{1024}$

5. Hitung nilai dari T = $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+4+\ldots+50}$

C. PEMBAGIAN

Suatu bilangan bulat a jika dibagi dengan bilangan bulat $b \neq 0$, maka akan selalu diperoleh hasil bagi q dan sisa pembagian r dengan r bilangan bulat non negatif yang kurang dari pembagi b. Secara matematik, situasi itu dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$a = bq + r, \qquad 0 \le r < |r|$$

Sebagai contoh perhatikan bilangan-bilangan

$$43, 43^2, 43^3, 43^4, 43^5, \ldots, 43^{2010}$$

Sisa pembagian 43 dengan 10 adalah 3.

Sisa pembagian 43^2 dengan 10 adalah 9.

Sisa pembagian 43^3 dengan 10 adalah 7.

Sisa pembagian 43^4 dengan 10 adalah 1.

Sisa pembagian 43^5 dengan 10 adalah 3

Sisa pembagian 43^6 dengan 10 adalah 9, dst.

Sisa pembagian bilangan itu membentuk suatu pola, yaitu, 3, 9, 7, 1, 3, 9, ...di mana setelah pembagian langkah ke-4 sisa pembagian bilangan berikutnya mengikuti pola sisa sebelumnya. Dengan demikian, sisa pembagian 43^{2010} dengan 10 akan sama dengan sisa pembagian 4^2, yaitu 9.

Proses pembagian biasa pada bilangan bulat dapat diterapkan pada pembagian fungsi kuadrat atau fungsi pangkat tiga dengan fungsi linear. Di dalam soal-soal kompetisi matematika, daerah asal (domain) dari fungsi-fungsi itu biasanya berupa bilangan bulat. Sebagai contoh perhatikan soal di bawah ini

Contoh 8 [IWYMIC 2008] Bilangan bulat positif a – 2 merupakan pembagi dari $3a^2 - 2a + 10$. Berapakah jumlah semua nilai yang mungkin dari a ?

Pembahasan

Perhatikan pembagian bilangan $3a^2 - 2a + 10$ dengan $a - 2$ di bawah ini

$$\frac{3\quad - 2\quad + 10}{\quad - 2} = (3\quad + 4) + \frac{18}{\quad - 2}$$

Karena $a - 2$ merupakan pembagi dari $3a^2 - 2a + 10$ maka $a - 2$ haruslah membagi 18. Bilangan yang mungkin untuk $a - 2$ hanyalah 1, 2, 3, 6, 9 dan 18. Sehingga jumlah dari semua nilai a yang mungkin adalah 3 + 4 + 5 + 8 + 11 + 20 = 51

LATIHAN SOAL

1. [IWYMIC 2005] Dalam suatu bilangan yang terdiri atas dua angka, angka puluhannya lebih besar dari angka satuan. Jika hasil kali dari kedua angkanya dapat dibagi dengan jumlahnya, berapa bilangan itu ?
2. [IWYMIC 2005] The total number of mushroom gathered by 11 boys and n girls is $n^2 + 9n - 2$, with each gathering exactly the same number. Determine the positive integer n.
3. [IWYMIC 2000] Tentukan angka satuan dari 17^{2000}.
4. [IWYMIC 2000] Misalkan N = 111…1222…2, di mana ada dua ribu angka 1 dan dua ribu angka 2. Jika N dibagi dengan bilangan 666…6 dengan dua ribu angka 6, tentukan hasil baginya.

D. PEMBAGIAN DENGAN BILANGAN ISTIMEWA

Kita dapat menganali apakah suatu bilangan dapat dibagi bilangan-bilangan tertentu atau tidak dengan tanpa melakukan proses pembagian. Misalnya bilangan 29870 dapat dibagi dengan 10. Bilangan 7356 tidak dapat dibagi dengan 5. Bilangan 345678 dapat dibagi dengan 2. Ciri-ciri bilangan yang habis dibagi 10, 5 atau 2 dapat diketahui dari angka satuan bilangan tersebut.

Di bawah ini akan disajikan ciri suatu bilangan habis dibagi bilangan tertentu dengan tanpa melakukan pembagian, tetapi cukup menghitung dari angka-angkanya.

a. Pembagian dengan 9

Untuk menentukan ciri-ciri suatu bilangan yang habis dibagi dengan 9 atau tidak, kita misalkan bilangan itu adalah N = $abcd$. Untuk bisa melihat bahwa angka-angka itu memiliki makna, kita dapat menuliskan bilangan itu dalam bentuk seperti di bawah ini

$$N = 1000a + 100b + 10c + d$$

Sekarang perhatikan bahwa bilangan itu dapat dituliskan dalam bentuk lain, yaitu

$$N = (999 + 1)a + (99 + 1)b + (9 + 1)c + d$$

$$\Leftrightarrow \quad N = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$$

$$\Leftrightarrow \quad N = 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d)$$

Misalkan 9 membagi bilangan N. Dari pernyataan terakhir, karena 9 membagi $9(111a+11b+c)$ maka kita harus memiliki bahwa 9 membagi $(a + b + c + d)$. Dengan demikian, ciri suatu bilangan dapat dibagi dengan 9 adalah bahwa jumlah dari angka-angka bilangan tersebut habis dibagi oleh 9.

Sebagai contoh bilangan 1571724 habis dibagi dengan 9, sebab

$$1 + 5 + 7 + 1 + 7 + 2 + 4 = 27$$

dapat dibagi dengan 9.

b. Pembagian dengan 11

Untuk mengenali suatu bilangan yang habis dibagi dengan 11, tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, misalkan bilangan itu adalah

$$N = abcd = 1000a + 100b + 10c + d$$

Sekarang kita tuliskan bilangan itu dalam bentuk lain seperti berikut:

$$N = (1001 - 1)a + (99 + 1)b + (11 - 1)c + d$$

$$\Leftrightarrow \quad N = (1001a + 99b + 11c) + (d - c + b - a)$$

$$\Leftrightarrow \quad N = 11(91a + 9b + c) + (d - c + b - a)$$

Karena 11 membagi N, dan 11 membagi $11(91a + 9b + c)$, maka kita harus memiliki bahwa 11 membagi $(d - c + b - a)$.

Sebagai contoh bilangan di atas, 1571724 juga habis dibagi dengan 11, sebab

$$4 - 2 + 7 - 1 + 7 - 5 + 1 = 11$$

dapat dibagi dengan 11.

Contoh 9 [IWYMIC 2002] Jika bilangan dengan 18 angka *A*36 405 489 812 706 44*B* habis dibagi dengan 99, carilah semua nilai yang mungkin dari pasangan terurut (*A*, *B*).

Pembahasan

Misalkan N = *A*36 405 489 812 706 44*B*,

S = *A*+3+6+4+0+5+4+8+9+8+1+2+7+0+6+4+4+*B* = 71 + A + B

T = B–4+4–6+0–7+2–1+8–9+8–4+5–0+4–6+3–A = -3 – A + B

Karena 9 membagi 99, dan 99 membagi N, maka 9 membagi N. Dari sini kita memperoleh 9 membagi S = 71+A+ B. Oleh karena itu, kemungkinan nilai dari

A+B = 1 dan 10.

Kemudian, 11 membagi 99, dan 99 membagi N maka 11 membagi N. Dari sini, kita akan memperoleh, 11 membagi T=-3–A+B. Kemungkinan nilai dari

–A + B = -8 dan 3

Dengan demikian, pasangan (A, B) yang mungkin adalah (9, 1)

LATIHAN SOAL

1. [IWYMIC 2000] Carilah jumlah semua bilangan antara 150 dan 650 sehingga jika dibagi dengan 10 sisanya 4
2. Misalkan bilangan 495 membagi 273x49y5, tentukan nilai x dan y.
3. a679b adalah bilangan yang terdiri atas 5 angka yang dapat dibagi oleh 72. Tentukan nilai a dan b
4. [IWYMIC 1999] Carilah sisa pembagian apabila bilangan

   122333444455555666666777777788888888999999999

   dibagi dengan 9.
5. [IWYMIC 2000] Jika bilangan

   $100000035811ab1^2=1000000cde2247482444265735361$, di mana a, b, c, d, e adalah bilangan bulat non negatif yang kurang dari 10, carilah nilai dari $a + b + c - d - e$.

6. [CMO 1978] Misalkan n adalah bilangan bulat. Jika angka puluhan dari n^2 adalah 7, maka angka satuan dari n^2 adalah . . [CMO 1978]

E. FUNGSI KHUSUS PADA BILANGAN BULAT

a. Fungsi Bilangan Bulat terbesar

Definisi: [|x|] menyatakan bilangan bulat terbesar yang yang lebih lebih kecil dari x.

Contoh: [|3,85|] = 3, [|-2,3|] = -3

Secara matematika, fungsi itu dapat dituliskan sebagai berikut:

$$[|x|] = n, \text{ di mana } x - 1 < n \leq x$$

Beberapa penerapan fungsi [|x|]

1. Menentukan pangkat tertinggi dari bilangan prima p dalam faktorisasi prima bilangan $n!$.

   Yang dimaksud dengan $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$

   Sebagai contoh 9! = 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1.

   Faktorisasi prima dari $9! = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$

   Dengan demikian, pangkat tertinggi dari 3 dalam faktorisasi prima 9! adalah 4. Kita akan mencari nilai 4 dengan menggunakan fungsi bilangan bulat terbesar. Untuk itu kita akan menerapkannya pada proses menenentukan pangkat tertinggi dari 3 dalam faktorisasi prima dari 50!.

   Banyaknya bilangan dari 1 s.d. 50 yang habis dibagi 3 adalah

   1.3, 2.3, 3.3, 4.3, . . ., 16.3 → 16 = —

   Banyaknya bilangan dari 1 s.d. 50 yang habis dibagi 3^2 adalah

   1.3^2, 2.3^2, 3.3^2, 4.3^2, dan 5.3^2 → 5 = —

   Banyaknya bilangan dari 1 s.d. 50 yang habis dibagi 3^3 adalah

   1.3^3 → 1 = —

Jadi, pangkat tertinggi dari 3 dalam faktorisasi prima 50! adalah

— + — + — = 16 + 5 + 1 = 22

2. Menentukan banyaknya angka nol dalam bilangan *n*!

   Sebagai ilustrasi, kita akan menentukan banyaknya angka nol dalam bilangan 50!. Banyaknya angka nol ini ditentukan oleh bilangan 10 = 2 x 5.

   Pangkat tertinggi dari 2 dalam faktorisasi prima 50! adalah

   — + — + — + — + — = 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 47

   Pangkat tertinggi dari 5 dalam faktorisasi prima 50! Adalah

   — + — = 10 + 2 = 12

   Dengan demikian, banyaknya angka nol dalam bilangan 50! berasal dari pangkat bilangan $(2 \times 5)^{12}$, yaitu 12.

3. Penerapan pada soal IWYMIC

   Contoh 10 [IWYMIC 2007] Misalkan x adalah bilangan positif. Apabila $[x]$ menyatakan bagian bilangan bulat dari x dan $\{x\}$ menyatakan bagian desimal dari x, tentukan jumlah semua bilangan positif yang memenuhi $5\{x\}+0.2[x]=25$

   Pembahasan

   Persamaan yang diberikan dapat dituliskan sebagai berikut:

   $$\{\ \} = \frac{125 - [\ ]}{25}$$

   Karena nilai dari $0 \le \{x\} < 1$, maka nilai dari $100 < [x] \le 125$. Untuk setiap nilai x berlaku

   $x = [x] + \{x\} = 5 –$ — $[x]$.

   Dengan demikian, jumlah semua bilangan positif yang memenuhi persamaan itu adalah

   5 – (24/25)(101) + 5 – (24/25)(102) + . . . + 5 – (24/25)(125)

   5(25) + (24/25)(101 + 102 + 103 + . . . + 125) = **2837**

b. Fungsi Banyaknya Pembagi positf dari Bilangan Bulat

Kita notasikan fungsi itu dengan $\tau(n)$, dan kita misalkan faktorisasi prima dari n adalah

$$= \quad . . .$$

dengan $p_1, p_2, . . . , p_r$ bilangan prima dan $k_1, k_2, . . ., k_r$ bilangan asli. Untuk menentukan banyaknya pembagi dari n, ditentukan oleh pembagi-pembagi dari bilangan , , . . . , dan .

Pembagi positif dari adalah $1, \; , \; , . . . ,$ $\Rightarrow k_1 + 1$ buah

Pembagi positif dari adalah $1, \; , \; , . . . ,$ $\Rightarrow k_2 + 1$ buah

.

.

.

Pembagi positif dari adalah $1, \; , \; , . . . ,$ $\Rightarrow k_r + 1$ buah

Sekarang pembagi-pembagi positif dari n merupakan semua kombinasi dari semua pembagi di atas, yaitu sebanyak

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) . . . (k_1 + 1)$$

Sebagai contoh, faktorisasi prima dari 15120 = $2^4 . 3^3 . 5 . 7$.

Maka banyaknya pembagi positif dari 15120 adalah

$$(4 + 1)(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 5 . 4 . 2 . 2 = 80$$

c. Fungsi Jumlah Semua Pembagi dari Bilangan Bulat

Kita notasikan fungsi ini dengan $\sigma(n)$ dengan faktorisasi prima dari n adalah

$$= \quad . . .$$

dengan $p_1, p_2, . . . , p_r$ bilangan prima dan $k_1, k_2, . . ., k_r$ bilangan asli. Sekarang kita perhatikan hasil kali dari jumlah pembagi-pembagi dari , , . . . , dan , yaitu

$$1 + \quad + \quad + . . . + \qquad . . . \quad 1 + \quad + \quad + . . . +$$

Suku-suku yang muncul di dalam perkalian itu merupakan pembagi-pembagi dari n. Dengan demikian, jumlah semua pembagi dari n adalah

$$\sigma(n) = 1 + \quad + \quad + \ldots + \qquad \ldots \quad 1 + \quad + \quad + \ldots +$$

Masing-masing penjumlahan dalam $\sigma(n)$ merupakan jumlah deret geometri, dan kita mengetahui bahwa

$$1 + \quad + \quad + \ldots + \qquad = \frac{\quad - 1}{\quad - 1}$$

Dengan demikian,

$$\sigma(n) = \qquad \qquad \ldots \qquad$$

Sebagai contoh, untuk bilangan 360 = $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, maka jumlah semua pembagi-pembagi dari 180 adalah

$$\sigma(180) = \qquad \qquad \qquad = \quad \quad \quad = 1170$$

LATIHAN SOAL

1. [IWYMIC 2008] Di dalam pernyataan

   $$\left[\sqrt{2008+\sqrt{2008+\sqrt{2008+\ldots+\sqrt{2008}}}}\right],$$

   bilangan 2008 muncul 2008 kali, dan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari x. Berapa nilai dari pernyataan itu ?
2. [IWYMIC 2004] Carilah semua bilangan real x yang memenuhi persamaan $\{(\quad + 1) \quad \} = \quad$ di mana {y} menyatakan bagian pecahan dari y, sebagai contoh {3.1416….} = 0.1416…..
3. [IWYMIC 1999] Misalkan x adalah bilangan dengan dua angka. Apabila $f(x)$ menyatakan jumlah dari x dan angka-angkanya dikurangi dengan hasil kali dari angka-angkanya, sebagai contoh jika x = 32,

maka $f(x)$ = 32 + 3 + 2 – 3 . 2 = 31. Carilah nilai x yang memberikan nilai $f(x)$ terbesar.

4. [IWYMIC 2000] Misalkan A adalah bilangan kelipatan 11 dan terletak di antara 100 dan 1000. Angka ratusan dari A lebih besar dari angka satuannya. Carilah bilangan A terkecil yang memenuhi semua kondisi di atas.