PEMBINAAN OLIMPIADE MATEMATIKA UNTUK GURU SMA/MA DI KABUPATEN SUNGAI LIAT PROVINSI BANGKA BELITUNG

Oleh:

Kusnandi

Universitas Pendidikan Indonesia

A. PENGANTAR

Setiap tahun Indonesia selalu mengirimkan kontingan untuk mengikuti *International Mathematics Olympiad* (IMO). Siswa yang mewakili Indonesia dalam IMO dipilih melalui serangkaian proses yang panjang, mulai dari seleksi tingkat sekolah, tingkat kabupaten/kota, tingkat provinsi, hingga seleksi tingkat nasional. Para siswa (biasanya 30 orang) yang lolos dalam seleksi tingkat nasional, dibina kurang lebih selama dua bulan dengan materi meliputi Aljabar, Geometri, Kombinatorik, Teori bilangan dan sebagainya. Dari proses pembinaan ini akan dipilih sebanyak 4 smpai 6 orang peserta terbaik yang akan mewakili Indonesia dalam Olimpiade Matematika Internasional.

Kegiatan kompetisi matematika dalam rangka menyeleksi peserta terbaik yang mewakili Indonesia dalam IMO diselenggarakan bersama-sama dengan seleksi untuk peserta olimpiade bidang sains lainnya. Kompetisi ini diberi nama Olimpiade Sains Nasional (OSN). Sehingga kita akan mengenal OSN Matematika SMA/MA Tingkat Kabupaten/Kota, OSN Matematika SMP/MTs Tingkat Provinsi dan yang lainnya.

Proses pembinaan siswa dalam menghadapi seleksi OSN Matematika pada masing-masing tingkatan menuntut pengetahuan tipe soal dan strategi menyelesaikannya. Di samping itu cakupan materi esensial untuk masing-masing tipe soal harus sudah dikuasai oleh calon peserta. Pada dasarnya, OSN Matematika SMA/MA mencakup materi matematika yang lazim diberikan dalam kurikulum pendidikan dasar dan menengah (di luar materi kalkulus dan statistika) dan sejumlah tambahan. Akan tetapi, dengan diberlakukannya KTSP (Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan), kurikulum di satu sekolah dapat berbeda dari sekolah lain, sehingga materi tambahan ini mungkin sudah dicakup dalam kurikulum sejumlah sekolah. Di bawah ini disajikan cakupan materi OSN Matematika SMA/MA.

B. CAKUPAN MATERI

No.	Materi Pokok	Deskripsi
1.	Aljabar - Sistem bilangan real	• Himpunan bilangan real dilengkapi dengan operasi tambah dan kali beserta sifat- sifatnya. • Sifat urutan (sifat trikotomi, relasi lebih besar/kecil dari, beserta sifat-sifatnya)
	- Ketaksamaan	• Penggunaan sifat urutan untuk menyelesaikan soal-soal ketaksamaan. • Penggunaan sifat bahwa kuadrat bilangan real selalu non negatif untuk menyelesaikan soal soal ketaksamaan. • Ketaksamaan yang berkaitan dengan rataan kuadratik, rataan aritmatika, rataan geometri, dan rataan harmonik.
	- Ketaksamaan	• Pengertian nilai mutlak dan sifat-sifatnya • Aspek geometri nilai mutlak • Persamaan dan ketaksamaan yang melibatkan nilai mutlak
	- Sukubanyak	• Algoritma pembagian • Teorema sisa • Teorema faktor • Teorema Vieta (sifat simetri akar)
	- Fungsi	• Pengertian dan sifat-sifat fungsi • Komposisi fungsi • Fungsi invers
	- Sistem koordinat bidang	• persamaan dan grafik fungsi • irisan kerucut (lingkaran, ellips, parabola, dan hiperbola)
	- Barisan dan deret	• suku ke-n suatu barisan • notasi sigma
	- Persamaan dan sistem persamaan	• Penggunaan sifat-sifat fungsi untuk menyelesaikan persamaan dan sistem persamaan • Penggunaan ketaksamaan untuk menyelesaikan persamaan dan system persamaan
2.	Geometri - Hubungan antara garis dan titik - Hubungan antara garis dan garis - Bangun-bangun bidang datar - Kesebangunan dan kongruen	segitiga, segiempat , segibanyak beraturan, lingkaran

	- Sifat-sifat segitiga: - Dalil Menelaus - Dalil Ceva - Dalil Stewart - Relasi lingkaran dengan titik - Relasi lingkaran dengan garis - Relasi lingkaran dengan segitiga - Relasi lingkaran dengan segiempat - Relasi lingkaran dengan lingkaran: - Garis-garis yang melalui satu titik (konkuren), titik-titik yang segaris (kolinier) - Trigonometri - Bangun-bangun ruang sederhana	garis istimewa (garis berat, garis bagi, garis tinggi, garis sumbu) Titik kuasa (*power point*) • Bersinggungan • Berpotongan • Tidak berpotongan • Lingkaran dalam • Lingkaran luar • Segi empat tali busur beserta sifat-sifatnya, • Dalil Ptolomeus • Dua lingkaran tidak beririsan: baik salah satu di dalam atau di luar yang lain • Dua lingkaran beririsan di satu titik (bersinggungan): dari dalam atau dari luar • Dua lingkaran beririsan di dua titik • Lingkaran-lingkaran sepusat (konsentris) perbandingan, fungsi, persamaan, dan identitas
3.	Kombinatorik - Prinsip pencacahan - *Pigeonhole principle* - Prinsip paritas	 • Prinsip penjumlahan, • Prinsip perkalian, • Permutasi dan kombinasi, • penggunaan prinsip pencacahan untuk menghitung peluang suatu kejadian
4.	Teori Bilangan - Sistem bilangan bulat - Keterbagian - FPB dan KPK, relatif prima, algoritma Euklid - Bilangan prima - Teorema dasar aritmatika (faktorisasi prima) - Persamaan dan sistem persamaan bilangan bulat	 himpunan bilangan bulat dan sifat-sifat operasinya pengertian, sifat-sifat elementer, algoritma pembagian

	- Fungsi tangga	

C. KIAT SUKSES BELAJAR MATEMATIKA OLIMPIADE

Saol-soal olimpiade matematika sangat menuntut kemampuan berfikir matematika tingkat tinggi (analisis dan sintesis). Oleh karena itu diperlukan kiat-kiat khusus dalam mempelajari (mengerjakan) soal-soal olimpiade.

1. Memahami konsep

Modal utama dalam mengerjakan soal olimpiade matematika adalah memahami konsep-konsep yang berhubungan dengan soal yang dihadapi. Bahkan seringkali ditemui sebuah soal dalam pokok bahasan tertentu menuntut pemahaman konsep pada pokok bahasan lainnya.

Contoh 1: *Titik A dan B terletak pada parabola* $y = 4 + x - x^2$. *Jika titik asal O merupakan titik tengah ruas garis AB, maka panjang AB adalah* .....

(Seleksi OSN Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2008)

Pembahasan

Misalkan titik A(x_a, y_a) dan titik B(x_b, y_b). Konsep titik pada kurva secara aljabar mengatakan bahwa nilai absis dan ordinat dari titik itu harus memenuhi persamaan kurva yang diberikan. Dalam hal ini kita peroleh

$$y_a = 4 + x_a - x_a^2 \qquad \text{dan} \qquad y_b = 4 + x_b - x_b^2 \qquad (1)$$

Kemudian, karena titik asal O(0,0) merupakan titik tengah ruas garis AB, maka berdasarkan konsep titik tengah diperoleh

$$x_a + x_b = 0 \qquad \text{dan} \qquad y_a + y_b = 0 \qquad (2)$$

Agar persamaan (2) dapat digunakan, maka persamaan pertama dan kedua dalam persamaan (1) harus dijumlahkan sehingga diperoleh

$$y_a + y_b = 8 + x_a + x_b - (x_a^2 + x_b^2)$$

atau

$$x_a^2 + x_b^2 = 8$$

Sekali lagi kita perlu konsep

$$(x_a + x_b)^2 - 2\,x_a x_b = x_a^2 + x_b^2 = 8$$

Dengan demikian,

$$x_a x_b = -4 \qquad \text{atau} \qquad x_b = -4/x_a$$

Setelah disubstitusi ke bagian pertama dalam persamaan (2) diperoleh $x_a = \pm 2$ dan $x_b = \mp 2$. Dari sini, kita memperoleh $y_a = \pm 2$ dan $y_b = \mp 2$. Dengan demikian, titik A(2, 2) dan B(–2, –2) atau sebaliknya.

Contoh 2: *Di dalam segitiga ABC, nilai dari tan A, tan B, dan tan C adalah bilangan bulat. Tentukan bilangan-bilangan itu.*

Pembahasan

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\tan A + \tan B + \operatorname{Tan} C &= \tan A + \tan B - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= (\tan A + \tan B)\left(1 - \frac{1}{1 - \tan A \tan B}\right) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\tan A \tan B \\ &= \tan A \tan B \tan C\end{aligned}$$

Misalkan tan A = a, tan B = b dan tan C = c, di mana a, b, dan c bilangan bulat sehingga $a + b + c = abc$. ABC bukan merupakan segitiga siku-siku. Misalkan $\angle A$ tumpul,, maka a negatif sedangkan b dan c positif. Jika $b = c = 1$, maka $abc < a + 2 = a + b + c$. Semakin besar nilai b atau c maka semakin besar pula nilai $a + b + c$, sedangkan nilai abc berkurang. Sekarang misalkan ABC lancip, maka a, b, dan c ketiganya positif, asumsikan $a \leq b \leq c$. Maka $abc = a + b + c \leq 3c$, sehingga $ab \leq 3$. Kita tidak dapat memiliki $a = b = 1$. Dari sini $a = 1, b = 2$ dan $c = 3$.

2. Memiliki motivasi yang kuat

Motivasi yang kuat dalam mengerjakan soal merupakan modal awal yang baik dalam mengerjakan soal olimpiade. Berbagai cara akan dilakukan dalam menghadapi soal yang sulit apabila memiliki motivasi yang bagus, seperi bertanya atau mencari sumber yang relevan. Berikut ini disajikan tipe soal olimpiade yang menuntut kesabaran dan motivasi yang kuat.

Contoh 3 : *Tunjukkan bahwa bilangan* $\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\,\text{angka}}\ \underbrace{22\ .\ .\ .\ 2}_{2009\,\text{angka}}\ 5$

merupakan bentuk kuadrat

Pembahasan

Proses induktif: $1225 = 35^2$, $112225 = 335^2$, $11122225 = 3335^2$

Konjektur : $\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}\ \underbrace{22\ .\ .\ .\ 2}_{2009\text{ angka}}\ 5 = \left(\underbrace{33\ .\ .\ .\ 3}_{2008\text{ angka}}5\right)^2$

Sekarang perhatikan kasus $112225 = 335^2$

$$\begin{aligned}335^2 &= (330 + 5)^2 \\ &= 9(110) + 3(110)10 + 25 \\ &= 110\,(9\ .\ 110 + 30) + 25 \\ &= 110\,(1000 + 20) + 25 \\ &= 11\ .\ 10^4 + 22\ .\ 10^2 + 25 \\ &= 112225\end{aligned}$$

Berdasarkan pola penurunan di atas, dengan proses mundur kita dapat membuktikan konjektur di atas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}\ \underbrace{22\ .\ .\ .\ 2}_{2009\text{ angka}}\ 5 &= \underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}\ .\ 10^{2010} + \underbrace{22\ .\ .\ .\ 2}_{2008\text{ angka}}\ .\ 10^2 + 25 \\ &= \underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}0\left(10^{2009} + 20\right) + 25 \\ &= \underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}0\left(\underbrace{99\ .\ .\ .9}_{2008\text{ angka}}0 + 30\right) + 25 \\ &= \underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}0\left(9\left(\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}0\right) + 30\right) + 25 \\ &= 9\left(\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}0\right) + 3\left(\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}0\right).10 + 25 \\ &= \left[3\left(\underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}0\right) + 5\right]^2 \\ &= \left(\underbrace{33\ .\ .\ .\ 3}_{2008\text{ angka}}5\right)^2\end{aligned}$$

3. Memiliki keberanian untuk mencoba

Keberanian untuk mencoba dengan tanpa takut berbuat kesalahan merupakan langkah awal keberhasilan menyelesaikan soal olimpiade. Kesalahan dapat diminimalisasi dengan memahami setiap langkah yang dilakukan. Pada umumnya siswa tidak dapat menyelesaikan suatu soal disebabkan kesulitan dalam memulai mengerjakan soal yang dihadapinya. Kesulitan ini dapat diatasi dengan mengamati dengan seksama apa yang diberikan dan atau apa yang ditanyakan dalam soal. Sebagai ilustrasi perhatikan contoh soal di bawah ini.

Contoh 4: *Misalkan $a * b$ adalah bilangan bulat untuk setiap bilangan bulat a dan b. Untuk setiap bilangan bulat a dan b, kita memiliki*

$$(a + 1) * b - (a - 1) * b = 4a \quad \text{dan} \quad b * a = -(a * b)$$

Jika $1 * 0 = 1$, carilah nilai dari $101 * 100$.

Pembahasan

Soal ini menuntut keberanian untuk mencoba mengeksplorasi pada operasi *. Salah satu caranya adalah dengan menetapkan bilangan bulat b. Kemudian perhatikan bahwa

$101 * b - 99 * b = 4.100$	$100 * b - 98 * b = 4 . 99$
$99 * b - 97 * b = 4. 98$	$98 * b - 96 * b = 4 . 97$
$97 * b - 95 * b = 4. 96$	$96 * b - 94 * b = 4 . 95$
.	.
.	.
.	.
$3 * b - 1 * b = 4 . 2$	$2 * b - 0 * b = 4 . 1$

Jadi, $101 * b - 1 * b = 4 . 50 . 51$ $\quad$ $100 * b - 0 * b = 4 . 50^2$

Khusus untuk $b = 1$, maka $100 * 1 = 4 . 50^2 - 1$

Untuk $b = 100$, maka $101 * 100 = 4.50.51 - 100 * 1 = 4.50.51 - 4.50^2 + 1$

$$= 4.50\,(51 - 50) + 1$$

$$= 201$$

D. LATIHAN SOAL

BAGIAN PERTAMA : ALJABAR

Soal Tingkat Kabupaten/Kota

1. [OSN 2008] Jika a dan b adalah bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$, maka $b = \cdots\cdots$
2. [OSN 2008] Suatu pertujukan dihadiri oleh sejumlah penonton. Setiap penonton dewasa membayar tiket seharga 40 ribu rupiah, sedangkan setiap penonton anak-anak membayar tiket 15 ribu rupiah. Jika jumlah uang penjualan tiket adalah 5 juta rupiah, dan banyaknya penonton dewasa adalah 40 % dari seluruh penonton, maka banyaknya penonton anak-anak adalah ⋯⋯
3. [OSN 2008] Setiap dung adalah ding. Ada lima ding yang juga dong. Tidak ada dung yang dong. Jika banyaknya ding adalah 15, dan tiga di antaranya tidak dung dan tidak dong, maka banyaknya dung adalah ⋯⋯⋯⋯
4. [OSN 2007] Berapakan nilai dari $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.
5. [OSN 2006] Jika diberikan $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots + (-1)^{n-1}(n)$ di mana $n = 1, 2, \ldots$, maka $S_{17} + S_{33} + S_{50} = \ldots$

   A. -2 B. -1 C. 0 D. 1 E. 22
6. [OSN 2006] Jika operasi $*$ terhadap bilangan real positif didefinisikan sebagai $a * b = \dfrac{ab}{a+b}$, maka $4 * (4 * 4) =$

   A. ¾ B. 1 C. 4/3 D. 2 E. 16/3
7. [OSN 2006] Dua bilangan positif disisipkan diantara bilangan-bilangan 3 dan 9 demikian rupa sehingga tiga bilangan pertama membentuk barisan geometri, sedangkan tiga bilangan terakhir membentuk barisan aritmetika. Jumlah dua bilangan positif tersebut adalah . . . .
8. [OSN 2005] Aries menggambar bagian dari parabola $y = x^2 - 6x + 7$. Titik-titik parabola yang muncul dalam gambar memiliki absis mulai dari 0 sampai +4. Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar titik-titik pada parabola yang muncul dalam gambar berturut-turut adalah

   A. −2 dan −1 B. −2 dan 7 C. −1 dan 7 D. 0 dan −1 E. 0 dan 7

9. [OSN 2005] Diberikan tiga bilangan positif x, y dan z yang semuanya berbeda. Jika $\frac{y}{x-z}=\frac{x+y}{z}=\frac{x}{y}$, maka nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan

   A. ½ B. 3/5 C. 1 D. 2 E. 10/3

10. Misalkan $5f(x)+3f(\frac{1}{x})=12x,$ tentukan nilai dari $f(2009)=$........

11. Diketahui akar-akar persamaan $x^3 - 14x^2 + px + q = 0$ membentuk barisan geometri dengan rasio 2. Tentukan nilai p dan q.

12. Misalkan $f(x) = x^2 + 3x + 2$ dan $S = \{ 1, 2, 3, 4, ... , 2009\}$. Berapakah banyaknya bilangan bulat $a \in S$ sehingga $f(a)$ bersisa 0 ketika dibagi 6 ?

13. Misalkan $a,b,c,d \geq 0$, $a,b,c,d \in R$. Buktikan bahwa

$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \leq \sqrt{(a+d)(b+c)}$$

14. [OSN 2005] Jika diberikan persamaan $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$, maka banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan tersebut adalah

    A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

15. Misalkan $f(x)=x^2-2ax-a^2-\frac{3}{4}$. Carilah semua nilai a sedemikian sehingga

$$|f(x)| \leq 1 \text{ untuk setiap } 0 \leq x \leq 1.$$

Soal Tingkat Provinsi

1. [OSN 2008] Jika $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$, maka $\frac{a+b}{a-b}=$

2. [OSN 2008] Jika x dan y bilangan bulat yang memenuhi $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, maka $3x^2y^2 = \cdots\cdots$

3. [OSN 2008] Misalkan a, b, c dan d bilangan rasional. Jika diketahui persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mempunyai 4 akar real, dua diataranya adalah 2 dan $\sqrt{2008}$. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah ··

4. [OSN 2008] Suatu polinom $f(x)$ memenuhi persamaan $f(x^2) - x^3f(x) = 2(x^3 - 1)$ untuk setiap x bilangan real. Derajat (pangkat tertinggi x) $f(x)$ adalah ······

5. [OSN 203] Persamaan kuadrat $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$ mempunyai dua akar real x_1 dan x_2. Berapakah nilai a yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut sehingga $x_1 < a < x_2$?

6. [OSN 2003] Berapakah nilai x yang memenuhi $^4\log(^2\log x) + {}^2\log(^4\log x) = 2$?

7. [OSN 2002] Tinjau persamaan yang berbentuk $x^2 + bx + c = 0$. Berapa banyakkah persamaan demikian yang memiliki akar-akar real jika koefisien b dan c hanya boleh dipilih dari himpunan {1, 2, 3, 4, 5, 6} ?
8. Bila $a, b, c \in$ R ada $0 \le a \le b \le c \le 1$, maka buktikan bahwa

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab}\le 2$$

Soal Tingkat Nasional

1. [WMSETS 1995] Untuk bilangan real a berapakah persamaan

$$|x-1| - |x-2| + |x-4| = a$$

Mempunyai tepat tiga penyelesaian ?

2. Carilah semua bilangan real a dengan sifat bahwa persamaan polinom $x^{10} + ax + 1 = 1$ memiliki solusi real r sehingga $1/r$ juga solusinya.
3. Untuk berapa banyak bilangan bulat k dengan $0 \le k \le 2009$ sehingga persamaan kuadrat $x^2 - x - k = 0$ mempunyai solusi bilangan bulat x
4. Hasil kali matriks 13 x 5 dengan matriks 5 x 13 memuat elemen x dengan tepat di dua tempat. Jika D(x) menyatakan determinan dari hasl kali matriks itu, dengan D(x = 0) = 2008, D(x = -1) = 1950, dan D(x = 2) = 2143, tentukan D(x)
5. Misalkan a, b, c sisi-sisi sebuah segitiga. Buktikan bahwa

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge 3$$

BAGIAN KEDUA : BILANGAN

Soal Tingkat Kabupaten/Kota

1. [OSN 2008] Banyaknya faktor positif dari 5! adalah

   A. 4 B. 5 C. 16 D. 24 E. 120

2. [OSN 2008] Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah ·····
3. [OSN 2008] Bilangan 4-angka dibentuk dari 1, 4, 7 dan 8 dimana masing-masing angka digunakan tepat satu kali. Jika semua bilangan 4-angka yang diperoleh dengan cara ini dijumlahkan, maka jumlah ini mempunyai angka satuan ·······
4. [OSN 2006] Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 adalah . . . .

   A. 169 B. 171 C. 173 D. 175 E. 177

5. [OSN 2006] Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + ... + 50 = 1139$. Jika a bilangan positif, maka $a = ...$

6. [OSN 206] Barisan s, 3, 5, 6, 7, 10, 11, . . . terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan itu adalah . . . .

7. [OSN 2006] Misalkan a, b, c bilangan-bilangan asli yang memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$. Jika $c \leq 20$, dengan tidak memperhatikan urutan a dan b, bayaknya pasangan bilangan a dan b yang mungkin adalah . . . .

8. [OSN 2007] Nanang mencari semua bilangan empat angka yang selisihnya dengan jumlah keempat angkanya adalah 2007. Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari . . . .

9. [OSN 2005] Mana di antara 5 ekspresi berikut yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 ?

   A. $5^{5^{5^5}}$ B. $6^{6^{6^6}}$ C. $8^{8^{8^8}}$ D. $9^{9^{9^9}}$ E. $10^{10^{10^{10}}}$

10. [OSN 2005] Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$

11. [WMSETS 1996] Carilah semua bilangan bulat n sehingga $n^2 + 3n + 1$ dapat dibagi dengan $3n + 10$

12. Tentukan semua pasangan bilangan asli p dan q yang memenuhi $p^2 - q^2 = 2009$

Soal Tingkat Provinsi

1. Misalkan x, y, z tiga bilangan asli berbeda. Faktor persekutuan terbesar ketiganya adalah 12, sedangkan kelipatannya persekutuan terkecil ketiganya adalah 840. Berapakah nilai terbesar bagi $x + y + z$?

2. [OSN 2003] Berapakah bilangan bulat positif k terkecil sehingga $\underbrace{20032003\ldots2003}_{k}$ habis dibagi 9 ?

3. [OSN 2003] Misalkan m dan n dua bilangan asli yang memenuhi $m^2 - 2003 = n^2$. Berapakah mn ?

4. [OSN 2003] Berapakah sisa pembagian $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ oleh 101 ?

5. Berapakah sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100 ?

6. Misalkan M d an m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil diantara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari $M - m$?
7. Bilangan real 2,525252⋯ adalah bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$ dimana m, n bilangan-bilangan bulat, $n \neq 0$. Jika dipilih m dan n yang relatif prima, berapakah $m + n$?

Soal Tingkat Nasional

1. Carilah semua bilangan bulat n sehingga $n^2 + 3n + 1$ dapat dibagi dengan $3n + 10$
2. Carilah semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = 40$$

3. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif 5 angka palindrome yang habis dibagi 3. Palindrom adalah bilangan/kata yang sama dibaca dari kiri ke kanan atau sebaliknya. Sebagai contoh 35353 adalah bilangan palindrome, sedangkan 14242 bukan.
4. Misalkan T = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} dan $M = \{a_1/7 + a_2/7^2 + a_3/7^3\ \ a_4/7^4 : a_i \in T, i = 1, 2, 3, 4\}$. Maka bilangan ke-2009 adalah . . . .

5. Carilah semua bilangan bulat positif k sehingga bilangan 1444 . . . 44 dengan tepat terdapat k angka 4, adalah bialngan kuadrat sempurna.
6. Mudah diperiksa bahwa

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{12^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{20^2}$$

Ini artinya 1/8 dapat dinyatakan sebagai jumlah dari kebalikan empat bilangan bulat kuadrat yang berbeda. Apakah mungkin menuliskan 1/8 sebagai jumlah dari kebalikan tiga bilangan bulat kuadrat yang berbeda.
7. Carilah semua pasangan bilangan (p, q) sehingga $2p^2 + q^2 = 4608$
8. Tanpa menggunakan kalkulator, manakah yang terbesar 31^{11} atau 17^{14}

BAGIAN KETIGA : GEOMETRI

Soal Tingkat Kabupaten/Kota

1. [OSN 2008] Lingkaran T merupakan lingkaran luar bagi segitiga ABC dan lingkaran dalam bagi segitiga PQR. Jika ABC dan PQR keduanya segitiga samasisi, maka rasio keliling ΔABC terhadap keliling ΔPQR adalah

A. 6 : 1 B. 4 : 1 C. 2:1 D. 2 E. 4

2. [OSN 2008] Segitiga ABC sama kaki, yaitu AB = AC, dan memiliki keliling 32. Jika panjang garis tinggi dari A adalah 8, maka panjang AC adalah

A. 9 1/3 B. 10 C. 10 2/3 D. 11 1/3 E. 12

3. [OSN 2008] Pada trapezium ABCD, sisi AB sejajar sisi DC dan rasio luas segitiga ABC terhadap luas segitiga ACD adalah 1/3. Jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah BC dan DA, maka rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah

A. 1 : 3 B. 3 : 5 C. 1 D. 5 : 3 E. 3

4. [OSN 2008] Kubus ABCDEFGH dipotong oleh bidang yang melalui diagonal HF, membentuk sudut 30^o terhadap diagonal EG dan memotong rusuk AE di P. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, maka panjang ruas AP adalah …………

5. [OSN 2006] Tutup sebuah kotak mempunyai luas $120cm^2$, sisi depan mempunyai luas $96cm^2$, dan isi samping mempunyai luas $80cm^2$. Tinggi kotak tersebut dalam cm adalah

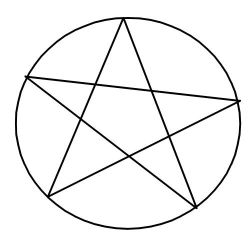
A. 8 B. 10 C. 12 D. 15 E. 24

6. [OSN 2006] Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan

A. 1 : 4 B. 1 : 3 C. 2 : 5 D. 4 : 11 E. 3 : 8

7. [OSN 2006] Sebuah persegi panjang mempunyai titik-titik sudut dengan koordinat (3, 1), (6, 1), (3, 5) dan (6, 5). Garis g melalui titik pusat koordinat dan membagi persegi panjang tersebut menjadi dua bagian yang luasnya sama. Kemiringan (gradien) garis g adalah . . . .

8. [OSN 2006] Pada gambar di samping, *a*, *b*, *c*, *d* dan *e* berturut-turut menyatakan besar sudut pada titik-titik ujung bintang lima yang terletak pada suatu lingkaran. Jumlah $a + b + c + d + e =$



A. 135^o B. 180^o C. 270^o D. 360^o E. tidak dapat ditentukan dengan pasti

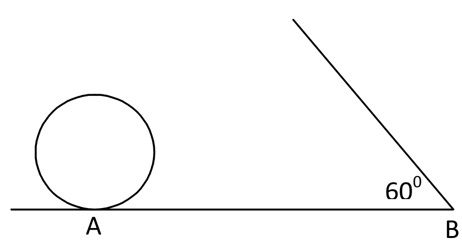
9. Misalkan panjang sisi alas BC pada segitiga sama kaki ABC adalah *p*, garis tinggi BD dan garis tinggi CE berpotongan di P. Jika panjang BD adalah *q*, maka sinus sudut DPE adalah . . .

10. Pada trapesium ABCD, diketahui AB sejajar DC. Jika E tengah-tengah AD dan F

tengah-tengah BC, tunjukkan bahwa $\overline{CD} + \overline{AB} - 2\overline{EF} = 0$

Soal Tingkat Provinsi

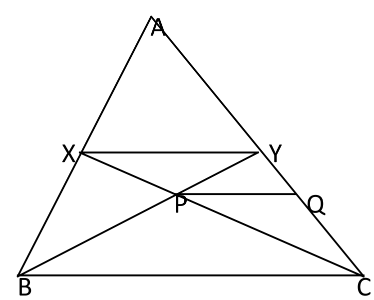
1. Diketahui PQ dan PR adalah diameter lingkaran dengan $\overline{PR} > \overline{PQ}$, dan misalkan pula *l* adalah sebuah garis yang melalui P dan memotong kedua lingkaran tersebut di titik S dan T. Jika panjang QR adalah 1 cm, berapakah panjang ST (Misalkan $\angle TPR = \theta$)
2. OSN 2008] Dalam bidang XOY, banyaknya garis yang memotong sumbu X di titik dengan absis bilangan prima dan memotong sumbu Y di titik dengan ordinat bilangan bulat positif serta melalui titik (4, 3) adalah ·····
3. [OSN 2008] Diberikan segitiga ABC, AD tegak lurus BC sedemikian rupa sehingga DC = 2 dan BD = 3. Jika $\angle$BAC = 45^0, maka luas segitiga ABC adalah ······
4. [OSN 2008] Diberikan segitiga ABC, dengan BC = a, AC = b dan $\angle$C = 60^0. Jika $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$, maka besarnya sudut B adalah ····
5. [OSN 2008] Diberikan segitiga ABC, dengan BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D dan E berturut-turut pada AB dan AC sedemikian rupa sehingga DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama. Panjang minimum DE adalah ·····
6. Pada sembarang segitiga ABC buktikan $\sin\frac{1}{2}A.\sin\frac{1}{2}B.\sin\frac{1}{2}C \le \frac{1}{8}$
7. [OSN 2003] Dalam sebuah segitiga ABC siku-siku sama kaki, dibuat persegi PQRS sebagai berikut: Titik P pada sisi AB, titik Q pada sisi AC, sedangkan titik-titik R dan S pada sisi miring BC. Jika luas segitiga ABC adalah *x*, berapakah luas persegi PQRS ?
8. [OSN 2003] Suatu garis vertikal membagi segitiga dengan titik sudut (0,0), (1,1) dan (9,1) menjadi dua daerah dengan luas yang sama. Apakah persamaan garis tersebut ?
9. [OSN 2003] Titik P terletak di dalam persegi ABCD demikian rupa, sehingga AP : BP : CP = 1 : 2 : 3. Berapakah besar sudut APB ?
10. [OSN 2003] Sebuah bola dengan jari-jari r ditendang dari B ke A. Bola tersebut menggelinding sebanyak tepat 10 putaran sebelum membentur bidang miring dan berhenti. Berapakah jarak dari B ke A ?



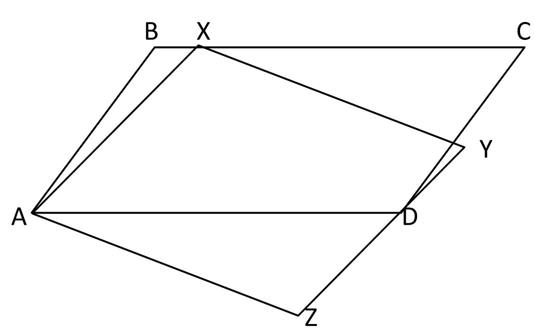
11. [OSN 2003] Suatu lingkaran mempunyai diameter AB yang panjangnya merupakan bilangan bulat 2-angka. Tali busur CD tegak lurus pada AB dan memotong AB di titik H. Panjang CD sama dengan bilangan yang diperoleh dengan menukar letak kedua angka dari panjang AB. Jika jarak dari H ke pusat lingkaran merupakan bilangan rasional, berapakah panjang AB ?
12. Sebidang tanah berbentuk persegipanjang dengan panjang b m dan lebar a m akan dibuat taman yang ditanami berbagai macam bunga. Pada sebagian dari tanah itu ada kolam berbentuk setengah lingkaran yang diameternya sama dengan panjang sebidang tanah itu. Berapakah panjang sebidang tanah itu agar taman bunga memiliki luas maksimum.

Soal Tingkat Nasional

1. Diketahui segitiga sama sisi ABC dengan panjang 10 cm. Jika lingkaran L_1 menyinggung AC di A dan BC di B, lingkaran L_2 menyinggung lingkaran L_1 , AC dan BC, berapakah panjang jari-jari lingkaran L_2.
2. Tiga buah lingkaran saling bersinggungan dan menyinggung sisi-sisi dari sudut $\angle$AOB seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini. Jika panjang jari-jari lingkaran terkcil adalah 1, tentukan panjang jari-jari lingkaran terbesar.
3. Dalam ΔABC garis XY sejajar dengan BC. Misalkan P adalah titik perpotongan garis BY dan CX, dan misalkan garis yang melalui P sejajar BC memotong CY di Q. Jika CQ = 2 dan QY = 1, tentukan panjang AC.

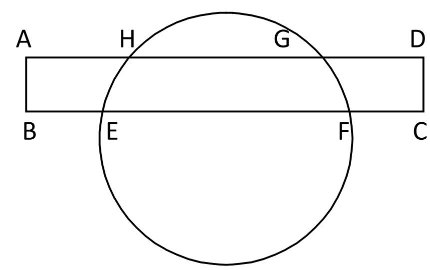


4. Pada gambar di samping ABCD da AXYZ adalah jajaran genjang dengan X terletak pada garis BC dan D terletak pada garis YZ. Buktikan bahwa luas daerah kedua jajaran genjang itu adalah sama



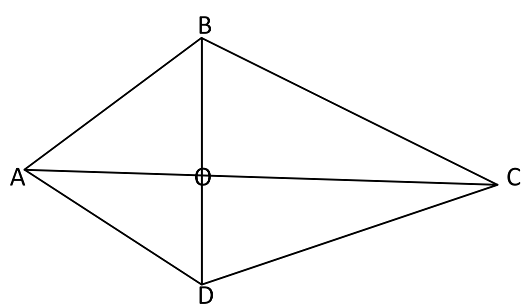
5. Sebuah lingkaran berjari-jari 1 menyinggung dua garis yang saling tegak lurus. Lingkaran kedua yang lebih kecil menyinggung lingkaran pertama dan kedua garis itu, lingkaran ketiga menyingung lingkarn kedua dan kedua garis itu. Proses seperti ini dilanjutkan hingga lingkaran ke sepuluh. Tentukan jari-jari lingkaran ke sepuluh.
6. Diketahui AD adalah garis tinggi ΔABC, $\angle DAB = \angle ACD$, AD = 6, dan BD = 8. Luas daerah ΔABC adalah . . . .

7. Persegi panjang ABCD memotong lingkarang di titik H, G, E, F seperti di tunjukkan pada gambar di samping. Jika AH = 4, HG = 5, dan BE = 3, tentukan panjang EF



8. Dalam ΔABC ditarik garis berat dari titik dan meotong garis BC di M. Jika $\angle ABM = 15^{\circ}$ dan $\angle AMC = 30^{\circ}$, tentukan ukuran $\angle BCA$.

9. ABCD adalah segi empat dengan O titik potong diagonal-diagonalnya.



Misalkan luas daerah ΔABD adalah 1, luas daerah ΔABC adalah 2, dan luas daerah ΔACD adalah 3, tentukan luas daerah ΔBDC dan ΔABO

BAGIAN KEEMPAT : KOMBINATORIK

Soal Tingkat Kabupaten/Kota

1. [OSN 2008] Banyaknya susunan huruf B, I, O, L, A sehingga tidak ada dua huruf hidup (vowel) yang berturutan adalah

   A. 8 B. 10 C. 12 D. 14 E. 16
2. [OSN 2008] Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah

A. 3 B. 4 C. 8 D. 16 E. 32

3. [OSN 2006] Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan (salaman). Setiap dua orang saling berjabat tangan paling banyak sekali. Banyaknya orang yang hadir dalam pertemuan tersebut paling sedikit adalah

   A. 28 B. 27 C. 14 D. 8 E. 7

4. [OSN 2008] Dua buah dadu identik (sama persis) dilemparkan bersamaan. Angka yang muncul adalah a dan b. Peluang a dan b terletak pada sisi-sisi yang bertolak belakang (di dadu yang sama) adalah ····

5. [OSN 2006] Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah

   A. ½ B. ¼ C. 2/21 D. 10/21 E. 11/21

6. [OSN 2004] Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 6 bola putih. Secara acak diambil dua bola sekaligus. Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah

   A. 5/12 B. 5/11 C. ½ D. 5/9 E. 5/7

7. [OSN 2004] Nomor polisi mobil-mobil di suatu negara selalu terdiri dari 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus genap, mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak ada

   A. 600 B. 1800 C. 2000 D. 4500 E. 5000

8. [OSN 2004] Sepuluh tim mengikuti turnamen sepakbola. Setiap tim bertemu satu kali dengan setiap tim lainnya. Pemenang setiap pertandingan memperoleh nilai 3, sedangkan yang kalah memperoleh nilai 0. Untuk pertandingan yang berakhir seri, kedua tim memperoleh nilai masing-masing 1. Di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124. Banyaknya pertandingan yang berakhir seri adalah . . . .

9. [OSN 2004] Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan pemuda internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota itu harus wanita, banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah . . . .

Soal Tingkat Provinsi

1. [OSN 2008] Cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan ada sebanyak ·········

2. [OSN 2008] Misalkan |X| menyatakan banyaknya anggota himpunan X. Jika $|A \cup B| = 10$ dan $|A| = 4$, maka nilai yang mungkin untuk |B| adalah ⋯⋯

3. [OSN 2008] Tiga bilangan dipilih secara acak dari {1,2,3, ⋯, 2008}. Peluang jumlah ketiganya genap adalah ⋯

4. [OSN 2008] Nilai dari $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$ = ...

5. [OSN 2003] Berapakah banyaknya cara memilih tiga bilangan berbeda sehingga tidak ada dua bilangan yang berurutan, jika bilangan-bilangan tersebut dipilih dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 9, 10 } ?

6. [OSN 2003] Dengan mengkombinasikan ketiga warna dasar merah, kuning, dan biru dapat dibentuk warna-warna yang lain. Misalkan terdapat 5 kaleng cat warna merah, 5 kaleng warna kuning, dan 5 kaleng warna biru. Budi boleh memilih kaleng manapun untuk mencampurkan warna, dan semua cat dalam sebuah kaleng harus dipakai semua. Ada berapa pilihan warna yang dihasilkan ?

7. [OSN 2003] Empat pasang suami isteri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok isteri. Untuk masing-masing kelompok disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?

8. [OSN 2002] Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikuti ketentuan berikut : (i) setiap anggota tergabung kedalam tepat dua komisi, dan (ii) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama. Berapakah n ?

9. Empat pasang suami-isteri membeli karcis untuk 8 kursi sebaris pada suatu pertunjukan. Dua orang akan duduk bersebelahan hanya kalau keduanya pasangan suami isteri atau berjenis kelamin sama. Berapa banyakkah cara menempatkan keempat pasang suami-isteri ke 8 kursi tersebut ?

10. Ada berapa banyakkah bilangan 4-angka berbentuk $abcd$ dengan $a \le b \le c \le d$