

PENYELESAIAN SOAL UJIAN KAPSEL II

1. Seutas tali dipotong menjadi 52 bagian yang masing-masing potongan membentuk deret aritmetika. Bila potongan tali terpendek adalah 3 cm dan yang terpanjang adalah 105 cm, maka panjang tali semula adalah....

Penyelesaian

Diberikan $n = 52$, $a = 3$ cm, $U_{52} = 105$

Panjang tali mula-mula adalah $S_{52} = 52/2 (3 + 105) = 2808$

2. Jika $V(x)$ dibagi oleh $x^2 - x$ dan $x^2 + x$ masing-masing bersisa $5x + 1$ dan $3x + 1$, maka bila $V(x)$ dibagi $x^2 - 1$ sisanya adalah

Penyelesaian

Diberikan $V(x) = (x^2 - x)H_1(x) + (5x + 1)$

$$V(x) = (x^2 + x)H_2(x) + (3x + 1)$$

Misalkan sisa pembagian $V(x)$ dengan $x^2 - 1$ adalah $ax + b$, maka berlaku

$$V(x) = (x - 1)(x + 1)H(x) + ax + b \quad (*)$$

Karena $V(1) = (1^2 - 1)H_1(1) + (5 \cdot 1 + 1) = 6$, dan

$$V(-1) = (1^2 + 1)H_2(-1) + (3 \cdot -1 + 1) = -2$$

Dari persamaan (*) diperoleh

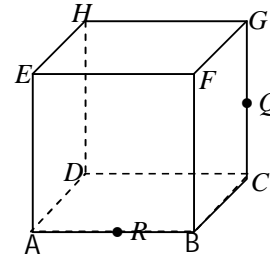
$$V(1) = (1 - 1)(1 + 1)H(1) + a \cdot 1 + b = 6 \quad \text{atau} \quad a + b = 6$$

$$V(-1) = (-1 - 1)(-1 + 1)H(-1) + a \cdot -1 + b = -2 \quad \text{atau} \quad -a + b = -2$$

Dengan demikian, nilai $a = 4$ dan $b = 2$.

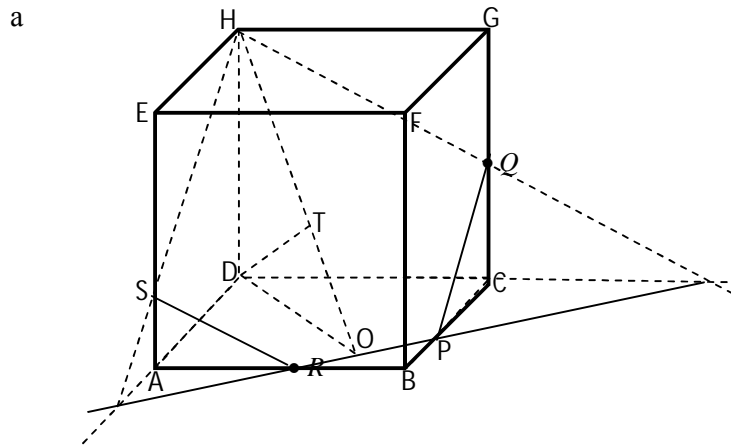
Jadi, sisa pembagian $V(x)$ dengan $x^2 - 1$ adalah $4x + 2$

3. Pada gambar di samping ini tampak kubus ABCD.EFGH dengan Q di tengah-tengah CG, R di tengah-tengah AB.



- a. Gambarlah irisan bidang yang melalui H, Q, dan R dengan kubus.
- b. Tentukan jarak dari titik D ke bidang iris

Penyelesaian



HQPRS adalah irisan bidang dengan bangun ruang.

- b. HO merupakan garis pada irisan bidang yang tegak lurus RP di O, dan T adalah proyeksi titik D pada garis HO. Dengan demikian, DT merupakan jarak dari titik D ke bidang iris HQPRS.

Misalkan panjang sisi kubus adalah a satuan. Perhatikan bahwa $|CP| = 2a/3$, sehingga $|PR| = \frac{2\sqrt{13}}{3} a$ dan luas $\triangle DPR = \frac{a^2}{3}$ satuan luas. Dari

sini diperoleh $|DO| = \frac{4a\sqrt{13}}{13}$ dan $|HO| = \frac{a}{\sqrt{13}}$.

Dengan menggunakan konsep luas daerah segi tiga di peroleh:

$$\frac{1}{2} |HO| |DT| = \frac{1}{2} |DO| |DH|$$

$$\begin{aligned}
|DT| &= |DO| |DH| / HO \\
&= 4a\sqrt{13}/13 \cdot a / \text{---} \\
&= 4a\sqrt{29}/29.
\end{aligned}$$

Jadi, jarak dari titik D ke bidang iris adalah $4a\sqrt{29}/29$ satuan panjang.

4. Diketahui fungsi f yang domainnya $D = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\pi\}$ didefinisikan oleh

$$f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \sin(\frac{1}{2}\pi + 2x).$$

Buatlah sketsa grafik fungsi f dan tuliskan pasangan koordinat dari semua titik baliknya

Penyelesaian

Fungsi f dapat disederhanakan menjadi

$$f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$$

Dinyatakan dalam bentuk $f(x) = k \cos(2x - \theta)$ diperoleh

$$k \cos \theta = -1 \quad \text{dan} \quad k \sin \theta = \sqrt{3}$$

Dengan demikian $\text{tg } \theta = -\sqrt{3}$ dan $k = \sqrt{3 + 1} = 2$.

Dari sini diperoleh $\theta = 2\pi/3$.

Jadi, $f(x) = 2 \cos(2x - 2\pi/3)$

Nilai maksimum adalah 2, terjadi untuk $\cos(2x - 2\pi/3) = 1$. Sehingga

$$2x - 2\pi/3 = 0 + 2\pi k$$

$$x = \pi/3 + \pi k$$

Jadi, koordinat titik balik maksimum adalah $(\pi/3, 2)$ dan $(4\pi/3, 2)$

Nilai minimum adalah -2, terjadi untuk $\cos(2x - 2\pi/3) = -1$. Sehingga

$$2x - 2\pi/3 = \pi + 2\pi k$$

$$x = 5\pi/6 + \pi k$$

Jadi, koordinat titik balik minimum adalah $(5\pi/6, -2)$ (dan $(11\pi/6, 2)$)

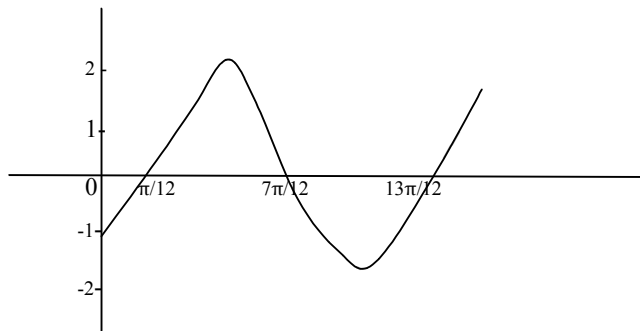
Koordinat titik potong sumbu- x terjadi untuk $\cos(2x - 2\pi/3) = 0$. Sehingga

$$2x - 2\pi/3 = \pi/2 + 2\pi k \quad \text{dan} \quad 2x - 2\pi/3 = -\pi/2 + 2\pi k$$

$$x = 7\pi/12 + \pi k \quad \text{dan} \quad x = \pi/12 + \pi k$$

Jadi, titik potong sumbu x adalah $(\pi/12, 0)$, $(7\pi/12, 0)$, $(13\pi/12, 0)$ dan $(19\pi/12, 0)$

Sketsa grafik $f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \cos(2x - 2\pi/3)$



5. Diberikan fungsi $(f \circ g) = x^2 + 4x + 5$ dan $g(x) = x + 2$
- Apakah invers dari f merupakan fungsi untuk $x > -1$? Berikan alasan
 - Carilah f^{-1} untuk $x \leq -1$

Penyelesaian

a. $f(x+2) = x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 + 1$

Untuk $x > -1$ fungsi f tidak satu-satu. Oleh karena itu invers dari f bukan merupakan fungsi

- b. Untuk $x \leq -1$ f merupakan fungsi satu-satu. Oleh karena itu f^{-1} ada.

Misalkan $y = x^2 + 1$. Maka $x = \pm \sqrt{y-1}$

Karena $x \leq -1$, maka $x = -\sqrt{y-1}$

Jadi, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari

$$\log(3x + 4) - \log(2x + 3) = \log 4 + {}^2\log\sqrt{3}$$

Penyelesaian

$$\log(3x + 4) - \log(2x + 3) = \log 4 + {}^2\log\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4}{2x+3} = 4 \cdot \sqrt{3} = \log 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+4}{2x+3} = 3$$

$$\Leftrightarrow 3x = -5$$

$$\Leftrightarrow x = -5/3$$

Untuk $x = -5/3$ nilai $\log(3x + 4)$ tidak ada. Jadi himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma di atas adalah \emptyset