

PEMECAHAN MASALAH MATEMATIKA

Oleh:

Kusnandi

A. Pengantar

Masalah dalam matematika adalah suatu persoalan yang siswa sendiri mampu menyelesaikannya tanpa menggunakan cara atau algoritma yang rutin. Maksudnya adalah siswa belum memiliki prosedur atau algoritma tertentu untuk menyelesaikannya, tetapi ia harus mampu menyelesaikannya berdasarkan baik kesiapan mentalnya maupun pengetahuan siapnya terlepas dari apakah ia sampai atau tidak kepada jawabannya. Oleh karena itu, menemukan jawaban bukanlah satu-satunya tujuan, tetapi bagaimana siswa beraktivitas dan berinteraksi dalam mencari jawaban merupakan bagian yang lebih penting.

Untuk dapat bekerja dengan masalah yang tidak rutin dituntut suatu pendekatan yang tepat sehingga siswa dapat beraktivitas dan berinteraksi secara harmonis dengan masalah yang dihadapinya. Pemecahan masalah dengan langkah-langkah yang hirarkis memberikan petunjuk apa yang harus dilakukan ketika berhadapan masalah yang belum dikenal dengan baik sebelumnya.

B. Strategi Pemecahan Masalah

Untuk menyelesaikan masalah dengan menggunakan pendekatan pemecahan masalah, kita akan mengikuti langkah-langkah dari Polya (1988) yang telah disusun secara hirarkis, yaitu sebagai berikut:

Langkah 1 : *Memahami masalah*

Untuk dapat memahami masalah, hal-hal yang harus dilakukan adalah

- Identifikasi apa yang diketahui dan apa yang ditanyakan (dibuktikan)
- Memperkenalkan notasi yang cocok
- Memodelkan masalah dalam bentuk diagram atau gambar.
- Memberikan ilustrasi atau contoh pada data berupa definisi.

Langkah 2 : Menyusun strategi

Hal-hal yang dilakukan ketika menyusun strategi penyelesaian diantaranya

- Menyatakan kembali masalah itu ke dalam bentuk yang lebih operasional
- Mengingat kembali apakah masalah yang dihadapi telah dikenal dengan baik sebelumnya, baik masalah yang sama maupun dalam bentuk yang berbeda.
- Menentukan definisi atau aturan yang dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang dihadapi.
- Perhatikan apa yang harus dicari (dibuktikan), dapatkah kita mengkondisikan sesuatu yang lebih sederhana sehingga kita dapat memperoleh apa yang dicari (dibuktikan).
- Menyelesaikan masalah dalam bentuk atau formulasi yang lebih sederhana
- Mengembangkan data yang diberikan berdasarkan aturan yang sudah diketahui

Langkah 3 : Menjalankan strategi

Hal-hal yang dilakukan ketika menjalankan strategi diantaranya:

- Lakukan rencana strategi itu untuk memperoleh penyelesaian dari masalah
- Perhatikan apakah setiap langkah yang dilakukan sudah benar (validitas argumen dapat dipertanggungjawabkan).

Langkah 4 : Memeriksa hasil yang diperoleh

Hal-hal yang dilakukan dalam memeriksa penyelesaian yang dihasilkan diantaranya

- Memeriksa validitas argumen pada setiap langkah yang dilakukan
- Menggunakan hasil yang diperoleh pada kasus khusus atau masalah lainnya
- Menyelesaikan masalah dengan cara yang berbeda.

C. Penerapan

Di bawah ini diberikan beberapa ilustrasi bagaimana menerapkan strategi pemecahan masalah dari Polya ketika menghadapi masalah yang tidak rutin.

Ulustrasi 1 : Misalkan x adalah bilangan real. Simbol $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x . Sebagai contoh $\lfloor 6,7 \rfloor = 6$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 8 \rfloor = 8$.

Hitung nilai A di mana

$$A \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt{100} \rfloor$$

Langkah-langkah pemecahan masalah

☞ *Memahami Masalah*

- Berikan ilustrasi definisi di atas pada bilangan lainnya, seperti 3,02, -2,7, 4,978
- Berikan notasi secara matematika definisi bilangan bulat terbesar, dengan memisalkan $\lfloor x \rfloor = n$ di mana n adalah bilangan bulat, tuliskan hubungan antara bilangan real x dengan bilangan bulat n

☞ *Menyusun Strategi*

- Menghitung nilai $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ dengan cara mencari nilai akar kuadrat dari beberapa suku pertama yang diharapkan dapat memunculkan konjektur untuk suku-suku berikutnya.
- Menghitung nilai $\lfloor \sqrt{k} \rfloor$ dengan cara menggunakan notasi matematika

☞ *Menjalankan Strategi*

- Dengan notasi matematika, misalkan $\lfloor \sqrt{k} \rfloor = n$, maka diperoleh

$$n \leq \sqrt{k} < n+1 \quad \text{atau} \quad n^2 \leq k < (n+1)^2$$

- Dari sini diperoleh, untuk $k = 1, 2, 3$ maka $n = 1$

Untuk $k = 4, 5, 6, 7$, dan 8 maka $n = 2$

Untuk $k = 9, 10, 11, 12, 13, 14$, dan 15 maka $n = 3$

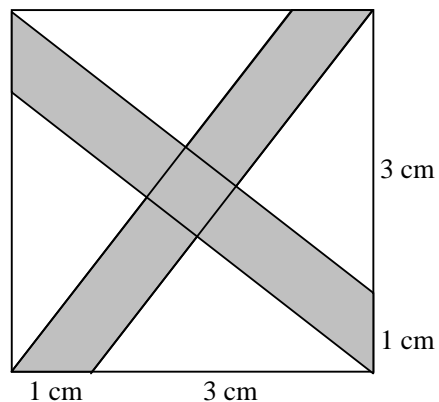
dst

- Sehingga diperoleh $A = 3(1) + 5(2) + 7(3) + 9(4) + 11(5) + 13(6) + 15(7) + 18(8) + 19(9) + 10 = 625$

☞ *Memeriksa Kembali*

- Periksa kembali apakah notasi matematika dari definisi itu sudah tepat atau tidak. Berikan contoh untuk beberapa bilangan.
- Berikan notasi matematika untuk definisi $\lceil x \rceil =$ bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari x .
- Periksa banyaknya bilangan pada masing-masing nilai

Ilustrasi 3: Pada persegi di bawah ini, hitunglah luas daerah yang diarsir !



Langkah-langkah pemecahan masalah

☞ *Memahami Masalah*

- Apakah masing-masing jajar genjang luasnya sama ?
- Bagaimana bentuk segiempat perpotongan kedua jajar genjang.
- Karena luas daerah segiempat itu dihitung dua kali, maka kita harus dapat mencari luas daerah segiempat itu.
- Mungkinkah kita memperoleh luas daerah segitiga yang tidak diarsir ?

☞ *Menyusun Strategi*

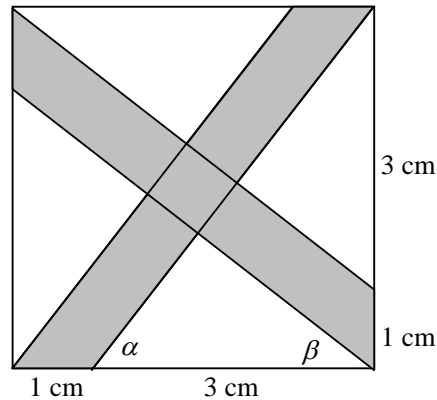
- luas masing-masing jajar genjang yang diarsir adalah sama
- salah satu luas daerah jajar genjang dapat ditentukan dari selisih luas persegi dan jumlah luas dua segitiga siku-siku.
- Kunci dari masalah di atas adalah menentukan bentuk segiempat perpotongan dua jajargenjang.
- Salah satu strategi menentukan bentuk segiempat itu adalah mencari sudut-sudutnya dengan bantuan sudut-sudut luarnya.

☞ *Menjalankan Strategi*

- Luas daerah salah satu jajar genjang adalah

$$L_1 = (4 \times 4) - 2\left(\frac{1}{2} (3 \times 4)\right) = 4 \text{ cm}^2$$

- Untuk memudahkan perhitungan, perhatikan sudut-sudut berikut



- Nilai $\text{tg } \alpha = 4/3$ dan $\text{tg } \beta = 3/4$. Karena $\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta = -1$, maka sudut segiempat yang bersesuaian adalah 90° . Dengan demikian, segiempat itu merupakan persegi.
- Panjang jajargenjang adalah $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.
- Tinggi jajargenjang diperoleh dari luas daerahnya, yaitu $t = L_1/5 = 4/5$ cm
- Dari sini diperoleh luas daerah persegi : $L_2 = 4/5$ cm x $4/5$ cm = $16/25$ cm²
- Dengan demikian, luas daerah yang diarsir adalah

$$L = (2 \times 4 \text{ cm}^2) - 16/25 \text{ cm}^2 = 7 \frac{9}{25} \text{ cm}^2$$

☞ **Memeriksa Kembali**

- Periksa setiap hasil yang diperoleh !

Ilustrasi 5 : Perhatikan kelompok bilangan berikut ini:

$$\{1, 3\}, \{5, 7, 9\}, \{11, 13, 15, 17\}, \{19, 21, 23, 25, 27\}$$

Tentukan jumlah dari bilangan yang terdapat pada kelompok ke-100.

Langkah-langkah pemecahan masalah

☞ **Memahami Masalah**

- perhatikan pola bilangan yang ada.
- perhatikan pola banyaknya bilangan pada kelompok ke-1, ke-2, ke-3, . . .

☞ **Menyusun Strategi**

- Suku ke- n dari pola bilangan yang ada dapat ditentukan
- Banyaknya bilangan pada kelompok ke- n dapat ditentukan

- Kunci dari masalah ini terletak pada bagaimana memperoleh suku pertama pada kelompok ke- n .

☞ **Menjalankan Strategi**

- Suku ke- n ' dari barisan bilangan yang ada :

$$U_n = 2n^2 - 1$$

- Banyaknya bilangan pada kelompok ke- n :

$$B_n = n + 1$$

- Banyaknya bilangan sampai kelompok ke- n :

$$SK_n = \frac{1}{2} n(2 + (n + 1)) = \frac{1}{2} n(n + 3)$$

- Suku pertama kelompok ke- $(n + 1)$:

$$a_{n+1} = 2(SK_n + 1) - 1 = n(n + 3) + 1$$

- Banyaknya bilangan sampai kelompok ke-99 :

$$SK_{99} = \frac{1}{2} 99(99 + 3) = 5049$$

- Suku pertama kelompok ke-100 :

$$a_{100} = 2(5049) + 1 = 10.099$$

- Banyaknya bilangan pada kelompok ke-100 : $B_{100} = 100 + 1 = 101$

- Suku terakhir pada kelompok ke-100 :

$$a_{100} + (101 - 1) 2 = 10.299$$

- Jumlah bilangan dalam kelompok ke-100 :

$$S_{100} = \frac{1}{2} 101(10.099 + 10.299) = \mathbf{1.030.099}$$

☞ **Memeriksa Kembali**

- Periksa lagi setiap rumus yang dihasilkan.
- Terapkan rumus-rumus yang dihasilkan pada kelompok bilangan yang mudah diketahui, misalnya pada kelompok ke-3. Maka
 - Banyaknya bilangan sampai kelompok ke-2 :

$$SK_2 = \frac{1}{2} 2(2 + 3) = 5 \quad (\text{BENAR})$$

- Suku pertama kelompok ke-3 :

$$a_3 = 2(5) + 1 = 11 \quad (\text{BENAR})$$

- Banyaknya bilangan pada kelompok ke-3 : $B_3 = 3 + 1 = 4 \quad (\text{BENAR})$

- Suku terakhir pada kelompok ke-3 :

$$a_3 + (4 - 1) 2 = 17 \quad (\text{BENAR})$$

- Jumlah bilangan dalam kelompok ke-3 :

$$S_{100} = \frac{1}{2} \cdot 4(11 + 17) = 56 \quad (\text{BENAR})$$

D. Soal-soal Latihan

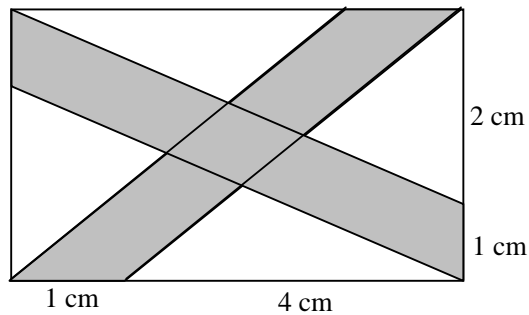
1. $\tau(n)$ didefinisikan sebagai banyaknya faktor dari n . Sebagai contoh factor dari 25 adalah 1, 5, dan 25. Dengan demikian, $\tau(25) = 3$. Jika

$$A = \tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \dots + \tau(2008)$$

Periksa apakah A bilangan genap atau ganjil !

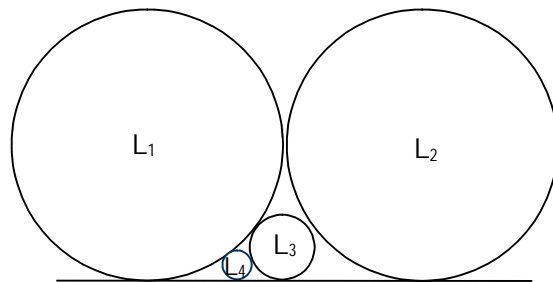
2. Sebuah bilangan mempunyai 8 pembagi. Hasil kali pembagi-pembagi itu adalah 331776. Tentukan bilangan tersebut.

3. Pada persegi panjang di bawah ini, hitunglah luas daerah yang diarsir !

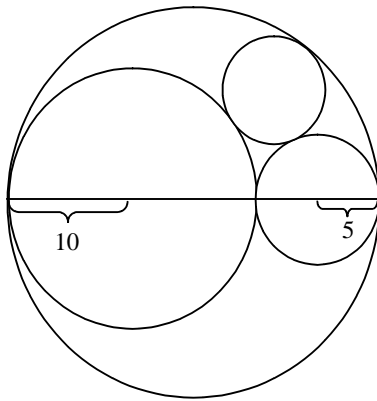


3.

Dua lingkaran masing-masing berjari-jari 1 saling bersinggungan dan menyinggung garis g . Lingkaran l_3 menyinggung lingkaran l_1 , l_2 dan garis g seperti yang ditunjukkan pada gambar di samping. Lingkaran l_4 menyinggung lingkaran l_1 , l_3 dan garis g . Hitung jari-jari lingkaran l_4 !



4.



Di dalam lingkaran yang berjari-jari 15 cm, digambar empat lingkaran yang berjari-jari 10 cm, 5 cm, dan x cm. Tentukan nilai x