PENALARAN MATEMATIKA

Oleh:

Kusnandi

A. Pengantar

Untuk dapat meningkatkan kemampuan berpikir matematika siswa perlu mengetahui tingkatan kemampuan berpikir matematika. Shefer dan Foster (1997) mengajukan tiga tingkatan kemampuan berpikir matematika, yaitu tingkatan reproduksi, tingkatan koneksi, dan tingkatan analisis. Masing-masing tingkatan terdiri atas komponen-komponen sebagai indikatornya, yaitu sebagai berikut:

Tingkatan I Reproduksi

- Mengetahui fakta dasar
- Menerapkan algoritma standar
- Mengembangkan keterampilan teknis

Tingkatan II Koneksi

- Mengintegrasikan informasi
- Membuat koneksi dalam dan antar domain matematika
- Menetapkan rumus yang akan digunakan untuk menyelesaikan masalah
- Memecahkan masalah tidak rutin

Tingkatan III Analisis

- Matematisasi situasi
- Melakukan analisis
- Melakukan interpretasi
- Mengembangkan model dan strategi baru
- Mengembangkan argumen matematika
- Membuat generalisasi.

Tingkatan kemampuan matematika di atas dapat digunakan selain untuk mengevaluasi penekanan proses pembelajaran yang selama ini dilakukan, juga menyusun instrumen (soal tes) yang dimaksudkan untuk mengetahui tingkatan kemampuan matematika siswa. Setelah kita dapat mengidentifikan tingkat kemampuan siswa, maka upaya-upaya meningkatkan kemampuan berpikir matematik dapat dilakukan dengan berpedoman pada komponen kemampuan pada tingkatan berikutnya.

B. Penalaran Matematika

Penalaran Matematika yang mencakup kemampuan untuk berpikir secara logis dan sistematis merupakan ranah kognitif matematik yang paling tinggi. Sumarmo (2002) memberikan indikator kemampuan yang termasuk pada kemampuan penalaran matematika, yaitu sebagai berikut:

- Membuat analogi dan generalisasi
- Memberikan penjelasan dengan menggunakan model
- Menggunakan pola dan hubungan untuk menganalisis situasi matematika
- Menyusun dan menguji konjektur
- Memeriksa validitas argumen
- Menyusun pembuktian langsung
- Menyusun pembuktian tidak langsung
- Memberikan contoh penyangkal
- Mengikuti aturan enferensi

Di bawah ini akan diberikan contoh masalah dalam matematika yang menuntut kemampuan penalaran matematika.

C. Masalah-Masalah Penalaran Matematika

a. Membuat Analogi

Contoh : Tentukan nilai dari

$$A = \frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \cdots + \frac{1}{2009x2010}$$

Jawab:

Suku ke-*k* dari deret itu adalah $\frac{1}{k(k+1)}$

Sekarang perhatikan bahwa $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

Dengan demikian, nilai dari A adalah

$$A = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ . \ . \ . + \left(\frac{1}{2008} - \frac{1}{2009}\right) + \left(\frac{1}{2009} - \frac{1}{2010}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2010}$$

$$= \frac{2009}{2010}$$

Terapkan pendekatan penyelesaian di atas pada masalah di bawah ini:

1. Hitung nilai dari $A = \frac{1}{72} + \frac{1}{90} + \frac{1}{110} + \cdots + \frac{1}{99990000}$
2. Hitung nilai dari

$$T = \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+4+...+50}$$

b. Menyusun dan Menguji Konjektur

Proses Induktif :

A = 1 dan B = 15 maka AB + 1 = 16 = 4^2

A =11 dan B = 105 maka AB + 1= 1156 = 34^2

A=111 dan B = 1005 maka AB + 1 = 111556 = 334^2

Konjektur ***:***

$A = \underbrace{11\ .\ .\ .\ 1}_{2008\,\text{angka}}$ dan $B = \underbrace{100\ .\ .\ .\ 05}_{2009\,\text{angka}}$ maka

$$AB + 1 = \left(\underbrace{3\,3\ .\ .\ .\ 3}_{2007\text{ angka}}4\right)^2$$

C. Menyusun dan Menguji Konjektur

Contoh : Misalkan $A = \underbrace{1\,1\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}$ dan $B = \underbrace{1\,0\,0\ .\ .\ .\ 0\,5}_{2009\text{ angka}}$

Perlihatkan bahwa AB + 1 merupakan bilangan bentuk kuadrat.

Jawab

Proses Induktif : A = 1 dan B = 15 maka $AB + 1 = 16 = 4^2$

A = 11 dan B = 105 maka $AB + 1 = 1156 = 34^2$

A = 111 dan B = 1005 maka $AB + 1 = 111556 = 334^2$

Konjektur : $A = \underbrace{1\,1\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}$ dan $B = \underbrace{1\,0\,0\ .\ .\ .\ 0\,5}_{2009\text{ angka}}$ maka

$$AB + 1 = \left(\underbrace{3\,3\ .\ .\ .\ 3}_{2007\text{ angka}}4\right)^2$$

Bukti konjektur

Perhatikan kasus A = 111 dan B = 1005 maka $AB + 1 = 111556 = 334^2$

$$\begin{aligned} 334^2 &= (333 + 1)^2 \\ &= [3(111) + 1]^2 \\ &= 111\,[9(111) + 6] + 1 \\ &= 111 \,.\, 1005 + 1 \\ &= AB + 1 \end{aligned}$$

Dengan proses mundur dengan mudah dapat ditunjukkan masalah itu.

$$\begin{aligned} AB + 1 &= \underbrace{1\,1\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}} \times \underbrace{1\,0\,0\ .\ .\ .\ 0\,5}_{2009\text{ angka}} + 1 \\ &= \underbrace{1\,1\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}\,[9\,(\underbrace{1\,1\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}) + 6] + 1 \\ &= 9\,(\underbrace{1\,1\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}})^2 + 6(\underbrace{1\,1\ .\ .\ .\ 1}_{2008\text{ angka}}) + 1 \end{aligned}$$

$$= [3(\underbrace{1\,1\;.\;.\;.\;1}_{2008\,\text{angka}}) + 1]^2$$

$$= (\underbrace{3\,3\;.\;.\;.3\,4}_{2008\,\text{angka}})^2$$

Masalah : Susun suatu konjektur untuk menunjukkan bahwa bilangan

$$\underbrace{1\,1\;.\;.\;.\;1}_{2007\,\text{angka}}\;\underbrace{2\,2\;.\;.\;.\;2}_{2008\,\text{angka}}\;5$$

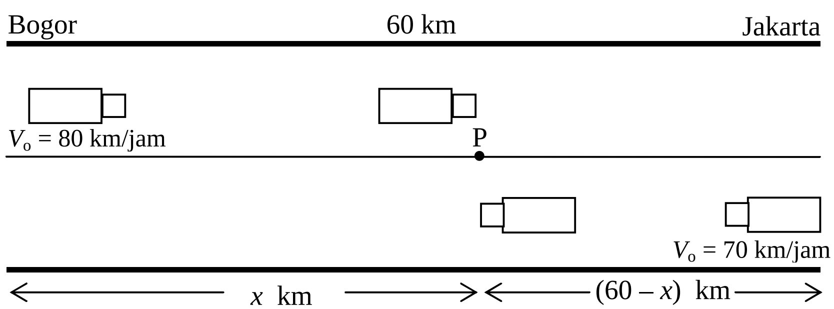
merupakan bentuk kuadrat

D. Memberi Penjelasan dengan Menggunakan Model

Contoh: Panjang jalan tol Bogor – Jakarta 60 km. Pada pukul 12.00 mobil A berangkat dari pintu tol Bogor menuju Jakarta dengan kecepatan rata-rata 80 km/jam. Pada saat yang sama mobil B berangkat dari pintu tol Jakarta menuju Bogor dengan kecepatan rata-rata 70 km/jam. Kedua mobil tersebut akan berpapasan pada pukul . . . .

Jawab

Model dari masalah di atas dapat digambarkan sebagai berikut:



Misalkan di titik P mobil A dan mobil B berpapasan, maka

$$t_A = t_B \;\Rightarrow\; \frac{s_A}{v_A} = \frac{s_B}{v_B}$$

$$\Rightarrow\; \frac{x}{80} = \frac{60 - x}{70}$$

$$\Rightarrow\; x = 32 \text{ km}$$

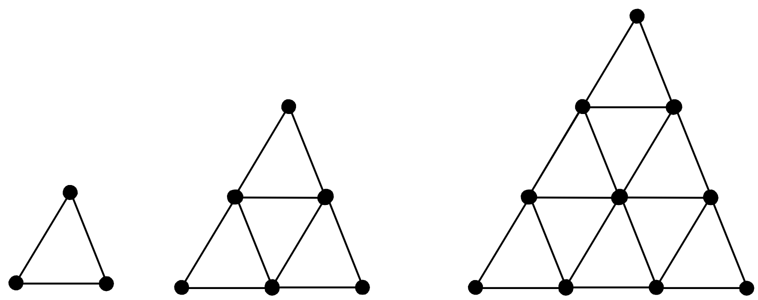
Sehingga t_A = 32/80 = 2/5 jam = 24 menit

Dengan demikian, mobil A dan mobil B berpapasan pada pukul 12.24

Masalah: Pada pukul berapa antara jam 2 dan jam 3 jarum panjang (menit) dan jarum pendek (jam) berimpit ?

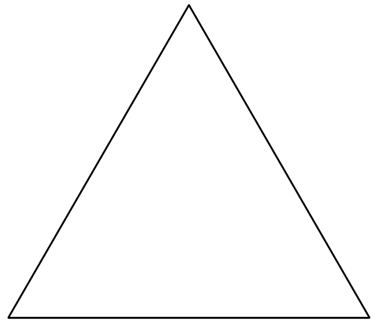
E. Menggunakan Pola untuk Menganalisis Situasi Matematik

Contoh: Ucok bermain menyusun batang-batang korek api seperti tampak pada gambar di bawah ini. Apabila susunan batang korek api yang dibuat Ucok dilanjutkan, tentukan banyak batang korek api yang diperlukan untuk membuat susunan ke-20.

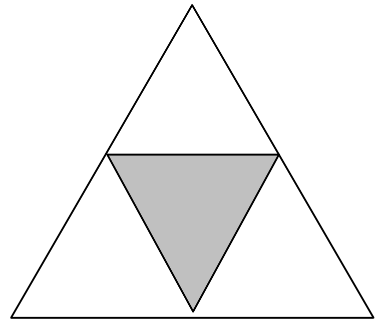


Masalah1: Berapa banyaknya cara memilih bilangan 15 dengan penjumlahan angka 1 atau 2 yang memperhatikan urutan. Sebagai contoh untuk 4 ada 5 cara, yaitu : 1 + 1 + 1 + 1; 1 + 1 + 2; 1 + 2 + 1; 2 + 1 + 1 dan 2 + 2

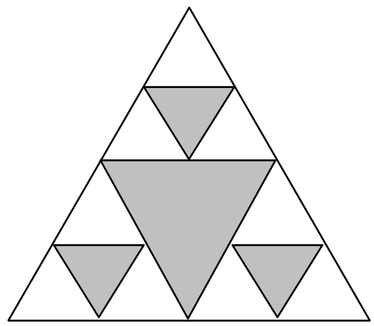
Masalah 2: Pada gambar-gambar di bawah ini: "*Gambar berikutnya diperoleh dengan menambah gambar segitiga sama sisi berarsir yang ukuran sisinya setengah dari masing-masing segitiga tak berarsir yang tersisa pada gambar selanjutnya*". Apabila luas daerah segitiga sama sisi pada gambar 1 adalah 1 satuan, tentukan luas keseluruhan segitiga berarsir pada gambar ke-5



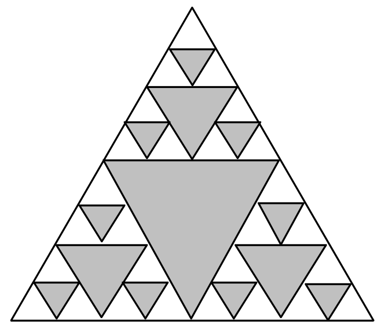
Gambar 1



Gambar 2



Gambar 3



Gambar 4

F. Memeriksa Validitas Argumen

Contoh 1: Periksa setiap langkah di bawah ini

Misalkan	$a = b$
Kalikan dengan a	$a^2 = ab$
Kurangkan dengan b^2	$a^2 - b^2 = ab - b^2$
Faktorkan	$(a + b)(a - b) = b(a - b)$
Bagi dengan $a - b$	$a + b = b$
Substitusi untuk a	$2b = b$
Bagi dengan b	$2 = 1$

Contoh 2: Periksa setiap langkah di bawah ini:

$$\sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1)}$$

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$$

$$\sqrt{1} \text{ x } \sqrt{1} = \sqrt{(-1)} \text{ x } \sqrt{(-1)}$$

$$1 = -1$$

G. Melakukan Pembuktian Secara Langsung

Contoh : Misalkan a bilangan ganjil. Tunjukkan bahwa a^2 bilangan ganjil.

Bukti:

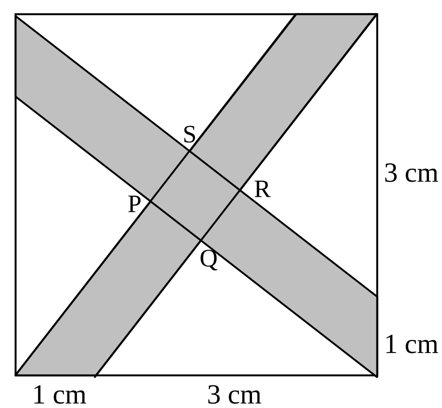
$$a \text{ bilangan ganjil} \Rightarrow a = 2k + 1\,,\ k \text{ bilangan bulat}$$

$$a^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + k) + 1$$

Dengan demikian, $a^2 = 2p$ dengan $p = 2k^2 + k$

Ini artinya, a^2 merupakan bilangan ganjil.

Masalah : Perhatikan persegi di bawah ini:



Tunjukkan bahwa segiempat PQRS merupakan persegi, kemudian tentukan luas daerahnya.

H. Melakukan Pembuktian Tidak Langsung

Contoh : Buktikan bahwa $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional

Bukti

Andaikan $\sqrt{2}$ meruapakan bilangan raisonal, maka $\sqrt{2}$ dapat dituliskan dengan $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, a dan b bilangan bulat yang tidak memiliki faktor persekutuan.

Dengan demikian,

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow a^2 = 2b^2 \Rightarrow a^2 \text{ bilangan genap} \Rightarrow a \text{ bilangan genap}$$

Misalkan $a = 2p$ dengan p bilangan bulat. Maka

$$a^2 = (2p)^2 = 4p^2 \Rightarrow 4p^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2p^2 \Rightarrow b \text{ bilangan genap}$$

Dengan demikian, a dan b merupakan bilangan genap. Ini menunjukkan bahwa a dan b memiliki faktor persekutuan 2. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal. Jadi, $\sqrt{2}$ bukan bilangan rasional.