

PEMBELAJARAN MATEMATIKA DENGAN STRATEGI ABDUKTIF-DEDUKTIF UNTUK MENUMBUHKEMBANGKAN KEMAMPUAN MEMBUKTIKAN PADA MAHASISWA

A. PENDAHULUAN

1. Latar Belakang Masalah

Pandangan para pakar pendidikan matematika terhadap perlunya pembuktian matematika diperkenalkan di tingkat sekolah mengalami perkembangan yang sangat menarik. Pada tahun 1970 dan 1980 ada suatu diskusi yang intensif di kalangan guru matematika di Amerika Serikat untuk membahas apakah pembuktian matematika perlu dimasukkan sebagai bagian dari kurikulum sekolah menengah atas. Para guru matematika itu berpendapat bahwa pembuktian matematika di sekolah sebenarnya telah dikembangkan dalam suatu pokok bahasan yang menekankan aspek-aspek formal, tetapi kurang memperhatikan pada pemahaman matematika (Hanna, 1983). Pandangan ini terus berkembang hingga *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM (1989) mengeluarkan suatu pernyataan bahwa (1) pembuktian secara deduktif tidak perlu lagi diajarkan di sekolah karena teknik heuristik lebih berguna bagi siswa dalam mengembangkan keterampilan penalaran dan jastifikasi dibandingkan pembuktian secara deduktif, dan (2) pembelajaran pembuktian di sekolah hanya diberikan kepada siswa yang bermaksud akan melanjutkan pendidikannya ke perguruan tinggi.

Pandangan terakhir mengenai perlunya pembuktian matematika diperkenalkan di sekolah direkomendasikan oleh NCTM (2000) bahwa pembuktian merupakan bagian dari kurikulum matematika di

semua tingkatan. Bagian “*Reasoning dan Proof*” dalam dokumen NCTM ini dinyatakan bahwa siswa seharusnya dapat:

- mengenal penalaran dan pembuktian sebagai aspek-aspek fundamental matematika
- membuat konjektur dan memeriksa kebenaran dari konjektur itu
- mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian matematika
- memilih dan menggunakan bermacam-macam jenis penalaran dan metode pembuktian.

Rekomendasi dari NCTM (2000) itu mengindikasikan bahwa pembuktian matematika merupakan salah satu aspek yang harus diperhatikan dalam pembelajaran matematika di sekolah. Sedikit atau banyaknya pengalaman siswa di dalam menyusun suatu pembuktian di sekolah menengah atas akan berdampak pada kemampuan membuktikan ketika mereka mengikuti kuliah di perguruan tinggi tingkat pertama, seperti yang dinyatakan oleh Moore (1994) bahwa salah satu alasan mengapa mahasiswa menemui kesulitan di dalam pembuktian adalah pengalaman mereka dalam mengkonstruksi bukti terbatas pada pembuktian geometri sekolah. Sejalan dengan itu, berdasarkan hasil studi yang dilakukan oleh Sabri (2003) terhadap konsep pembuktian matematika mahasiswa calon guru disarankan agar kurikulum sekolah menengah atas hendaknya mempersiapkan siswa lebih baik lagi dalam pembelajaran pembuktian matematika. Hal ini menunjukkan bahwa konsep pembuktian matematika mahasiswa di perguruan tinggi sangat lemah.

Kesulitan mahasiswa tahun pertama dalam pembuktian itu tentu saja akan berpengaruh pada pembelajaran mata kuliah lainnya yang sarat dengan pembuktian, seperti mata kuliah Analisis Real, Aljabar

Abstrak, dan yang lainnya. Di samping itu, aspek-aspek penalaran yang terkandung di dalam pembuktian matematik tidak akan berkembang secara optimal, sehingga peningkatan kemampuan berpikir matematik mahasiswa berjalan lambat. Aspek-aspek penalaran itu adalah aspek konjektur (membuat dugaan mengenai gagasan utama dalam pembuktian), aspek analisis (menganalisis fakta-fakta yang ada), aspek koneksi (membuat hubungan diantara fakta-fakta dengan kesimpulan yang ingin dicapai), aspek sintesis (mensintesa dengan memanipulasi fakta-fakta untuk mencapai kesimpulan), bahkan evaluasi (mengevaluasi aturan-aturan penarikan kesimpulan dari fakta-fakta yang diberikan atau yang diperoleh dan strategi pembuktian secara kritis), dan aspek komunikasi matematik (mengekspressikan ide serta proses pembuktian secara lisan maupun tulisan).

Berdasarkan uraian di atas, dapat dikatakan bahwa upaya untuk mengembangkan suatu model pembelajaran yang dapat mengatasi kesulitan-kesulitan mahasiswa dan dapat menjembatani peningkatan tahap berpikir mahasiswa merupakan sesuatu yang sangat mendesak untuk dilakukan agar kompetensi mahasiswa, baik mahasiswa tahun pertama Program Studi Matematika maupun mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dapat berkembang secara optimal.

Salah satu pendekatan pembelajaran yang memungkinkan dapat menumbuh kembangkan kemampuan membuktikan adalah pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif. Pendekatan ini merupakan suatu pendekatan pembelajaran yang dimulai dengan menyajikan masalah kepada mahasiswa, kemudian mereka dituntut untuk dapat mengelaborasi setiap informasi atau fakta yang diberikan,. Melalui pendekatan ini, masalah yang diberikan harus dapat mengan-

tarkan mahasiswa untuk memahami objek-objek matematika dan kaitan antara objek matematika yang satu dengan objek yang lainnya. Dosen mendorong mahasiswa untuk melakukan *transactive reasoning* seperti mengkritik, menjelaskan, mengklarifikasi, menjustifikasi dan mengelaborasi suatu gagasan yang diajukan, baik yang diinisiasi oleh mahasiswa maupun dosen. Untuk dapat terlibat di dalam diskusi transaktif, kemampuan awal matematika mahasiswa memegang peranan yang sangat penting, sehingga suatu gagasan yang muncul dapat berkembang secara bertahap sehingga membangun suatu konsep matematika yang komprehensif.

Penelitian ini berupaya untuk mengkaji efektifitas pendekatan pembelajaran abduktif-deduktif yang diusulkan itu di dalam menumbuhkembangkan kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan pada mahasiswa. Di samping itu, aspek lainnya seperti kemandirian belajar mahasiswa yang mungkin dapat terbentuk sebagai dampak penerapan pendekatan pembelajaran ini juga akan mendapat perhatian.

Perbedaan beban satuan kredit semester secara keseluruhan atau pun bidang/mata kuliah yang harus dicapai oleh mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan mahasiswa Program Studi Matematika diduga akan menunjukkan perbedaan dalam hal kemampuan membuktikan. Oleh karena itu, program studi akan dijadikan sebagai salah satu faktor dari variable dalam penelitian ini.

2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut

1. a. Bagaimanakah kualitas kemampuan membaca bukti mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif dibandingkan dengan mahasiswa yang belajar secara konvensional di masing-masing program studi.
b. Bagaimanakah kualitas kemampuan membuktikan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif dibandingkan dengan mahasiswa yang belajar secara konvensional di masing-masing program studi.
2. a. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membaca bukti antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif dan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan konvensional ?
b. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membuktikan matematik antara mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif dan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan pendekatan konvensional ?
3. a. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membaca bukti mahasiswa ditinjau dari pendekatan pembelajaran yang digunakan dan program studi ?
b. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membuktikan matematik mahasiswa ditinjau dari pendekatan pembelajaran yang digunakan dan program studi ?
4. a. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membaca bukti mahasiswa ditinjau dari pendekatan pembelajaran yang digunakan dan kemampuan awal mahasiswa ?
b. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membuktikan matematik mahasiswa ditinjau dari pendekatan pembelajaran yang digunakan dan kemampuan awal mahasiswa ?

5. a. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membaca bukti mahasiswa ditinjau dari program studi dan kemampuan awal mahasiswa ?
b. Apakah terdapat perbedaan capaian kemampuan membuktikan matematik mahasiswa ditinjau dari program studi dan kemampuan awal mahasiswa ?
6. Apakah terdapat perbedaan kemandirian belajar mahasiswa ditinjau dari pendekatan pembelajaran yang digunakan dan program studi ?
7. Apakah terdapat perbedaan kemandirian belajar mahasiswa ditinjau dari pendekatan pembelajaran yang digunakan dan kemampuan awal mahasiswa ?
8. Apakah terdapat perbedaan kemandirian belajar mahasiswa ditinjau dari program studi dan kemampuan awal mahasiswa ?
9. Bagaimanakah gambaran kinerja mahasiswa ditinjau dari proses pembelajaran dan penyelesaian soal-soal tes kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan matematik yang diberikan ?

3. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah yang diajukan di atas, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Tersusunnya hasil penelitian tentang kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan matematik mahasiswa sebagai dampak dari penggunaan pendekatan pembelajaran, dan interaksinya dengan program studi dan kemampuan awal mahasiswa.

2. Tersusunnya model kerangka berpikir yang digunakan mahasiswa dalam membaca bukti dan membuktikan matematik sesuai dengan pengalaman belajar yang diperolehnya.
3. Tersusunnya hasil penelitian tentang kemandirian belajar mahasiswa sebagai dampak dari penggunaan pendekatan pembelajaran, dan interaksinya dengan program studi dan kemampuan awal mahasiswa.
4. Tersusunnya hasil penelitian secara teoritis yang bermanfaat bagi calon guru, calon matematikawan, dan dosen matematika dan pendidikan matematika dalam kaitannya dengan upaya pengembangan kemampuan membuktikan matematik.

B. KAJIAN PUSTAKA

Metode pembuktian dikembangkan bertujuan untuk meningkatkan kemampuan mahasiswa dalam memahami pembuktian, dan mengerjakan (membuktikan) suatu pernyataan matematik. Berbagai pendekatan dan metode telah dikembangkan, di antaranya Tall (1991) menyarankan konsep bukti generik sebagai cara untuk meningkatkan pemahaman mahasiswa terhadap bukti suatu pernyataan. Bukti generik diberikan dalam level contoh yang menjelaskan konsep secara umum dengan memandang contoh khusus. Hal ini tentu saja berbeda dengan pembuktian secara umum yang mensyaratkan abstraksi dengan level yang lebih tinggi.

Kemudian, Leron (dalam Tall, 1991) mengajukan bukti terstruktur dengan sifat menggabungkan metode penyajian formal dan informal ke dalam suatu pembuktian. Tujuan utama dari bukti terstruktur ini bukan untuk meyakinkan, tetapi untuk membantu pembaca dalam meningkatkan pemahamannya terhadap gagasan di

belakang bukti itu, dan bagaimanakah hubungannya dengan hasil-hasil matematika lainnya.

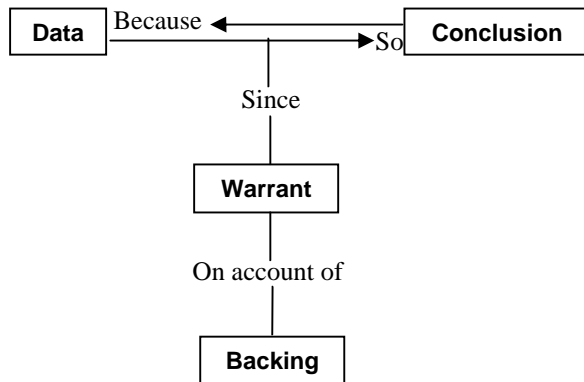
Uhlig (2003) mengembangkan suatu pendekatan untuk memahami dan mengkonstruksi suatu pembuktian di dalam matakuliah aljabar linear elementer. Matakuliah ini dipandang sebagai matakuliah transisi ke pembuktian dengan serangkaian deduksi *Definition-Lemma-Proof-Theorema-Proof-Corollary*. Untuk mempersiapkan mental dan emosional mahasiswa di dalam menghadapi rangkaian deduksi itu, Uhlig mengajukan pendekatan di dalam melakukan pembuktian dengan mengeksplorasi secara intuitif terhadap pernyataan yang harus dibuktikan dengan pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut: *What happens if ? Why does it happen ? How do different cases occur ? What is true here ?* Dengan pertanyaan yang bersifat eksploratif ini, diyakini bahwa pengetahuan tentang *Theorems* yang dihadapinya akan bertambah. Demikian pula pemahamannya secara konseptual. Pendekatan di dalam mengembangkan suatu pembuktian ini dinamakan pendekatan WWHWT

Kemudian, Reiss dan Renkl (2002) mengajukan konsep contoh-jawab huristik yang menyediakan overviu dari suatu jenis contoh yang tidak hanya memberikan bukti dari contoh itu, tetapi juga membantu mahasiswa menunjukkan aspek-aspek pembuktian secara umum. Langkah-langkah huristik dalam contoh yang dibuktikan itu adalah sebagai berikut: (1) mengeksplorasi situasi masalah, (2) membuat konjektur, (3) mengumpulkan informasi untuk memeriksa konjektur, (4) membuktikan konjektur, (5) memeriksa kembali.

Model-model strategi pembuktian yang telah dikembangkan di atas, belum ada yang membahas secara eksplisit bagaimana memunculkan gagasan utama dari struktur pembuktian, baik untuk

memahami pembuktian yang ada maupun untuk mengkonstruksi suatu pembuktian.

Dalam penelitian yang dilakukan ini, pernyataan-pernyataan di dalam pembuktian matematika dipandang sebagai salah satu bentuk argumentasi dengan struktur mengikuti struktur argumentasi yang dikembangkan oleh Toulmin (dalam Pedemonte, 2003).. Struktur argumentasi dari Toulmin ini digunakan Krummheuer (dalam Hoyles & Kuhemann, 2003) untuk menganalisis argumentasi, seperti pada Gambar 1 di bawah ini.



Gambar1 Skematik untuk Menganalisis Argumentasi

Sumber: Krummheuer (dalam Hoyles & Kuhemann, 2003)

Dalam hubungannya dengan pembuktian matematika, pernyataan-pernyataan di dalam pembuktian matematika dipandang sebagai salah satu bentuk argumentasi. Di dalam argumentasi pembuktian matematika, sebagai data adalah premis-premis, sedangkan yang menjadi *warrant* adalah definisi atau teorema. Diagram skematik ini dapat digunakan sebagai model untuk membantu membaca pembuktian suatu pernyataan matematika, dan dengan sedikit

modifikasi dapat digunakan untuk mengkonstruksi pembuktian matematika.

Yang dimaksud dengan membaca di sini adalah serangkaian keterampilan untuk menyusun intisari informasi dari suatu teks (Sumarmo, 2003). Lebih lanjut Sumarmo (2003) menyatakan bahwa seorang pembaca dikatakan memahami teks apabila ia dapat mengemukakan gagasan matematika dari suatu teks baik dalam bentuk lisan maupun tulisan dengan bahasanya sendiri. Dengan demikian, seorang pembaca tidak hanya sekedar melafalkan teks, melainkan mengemukakan makna yang terkandung di dalam teks yang bersangkutan.

Dalam hubungannya dengan membaca pembuktian dari suatu pernyataan matematika, pernyataan itu akan dinyatakan dalam bentuk “jika p maka q ” atau “ $p \Rightarrow q$ ” di mana p adalah hipotesis yang terdiri atas premis-premis, dan q adalah konklusi. Berdasarkan diagram skematik dari Krummheuer, p adalah *data* dan q adalah *conclusion*. Seorang mahasiswa dikatakan dapat membaca pembuktian suatu pernyataan matematika bentuk $p \Rightarrow q$ apabila dapat mengidentifikasi apa yang menjadi data dari pernyataan itu; dapat mengidentifikasi apa yang menjadi *conclusion* dari pernyataan itu; dapat menyatakan keterkaitan di antara data, dan antara data dengan konklusi dengan menunjukkan suatu *warrant*; dapat membuat dugaan mengenai konsep kunci yang menjembatani antara data dan konklusi; dapat mengevaluasi aturan-aturan penarikan kesimpulan dari fakta-fakta yang diberikan atau yang diperoleh secara kritis; dapat mengekspresikan ide serta proses matematika baik secara lisan maupun tulisan.

Diagram skematik Krummheuer dapat juga digunakan untuk mengembangkan suatu model strategi pembuktian matematika secara informal. Konklusi di dalam skematik itu, baik sebagai *target-conclusion* maupun *claim* perantara yang dilakukan di atas menggunakan penarikan kesimpulan secara deduktif. Argumentasi dengan cara seperti ini dinamakan *argumentasi deduktif*.

Akan tetapi, sering ditemui bahwa antara *warrant* yang menjamin untuk menghasilkan suatu konklusi dari data yang ada belum terpikirkan. Salah satu cara untuk memunculkan gagasan ke arah *claim* perantara adalah dengan cara abduktif. Abduksi adalah suatu penarikan kesimpulan yang dimulai dari fakta yang diamati berupa *claim*, dan suatu aturan yang diberikan, membawa pada suatu kondisi yang harus dimiliki. Langkah abduktif dapat disajikan dengan cara sebagai berikut:

B

$A \Rightarrow B$

\therefore Premis yang lebih memungkinkan adalah A

di mana B adalah fakta yang diamati (sebagai *claim*), dan $A \Rightarrow B$ adalah suatu aturan (sebagai *warrant*). Argumentasi dengan cara seperti ini dinamakan *argumentasi abduktif*.

Argumentasi pembuktian yang dilakukan dengan mengkombinasikan kedua argumentasi seperti pada pembuktian teorema 1 di atas dinamakan *argumentasi abduktif-deduktif*. Dengan demikian, langkah-langkah membuktikan pernyataan $A \Rightarrow B$ dengan abduktif-deduktif dapat disajikan sebagai berikut

B

$C \Rightarrow B$

\therefore Premis yang lebih memungkinkan adalah C

A

$A \Rightarrow C$

\therefore C

di mana C adalah konsep kunci yang menjembatani antara fakta A dan kesimpulan B

Model-model argumentasi dalam pembuktian matematika yang dikembangkan ini bukan model penulisan bukti matematika, tetapi hanya merupakan suatu model yang diharapkan dapat menjembatani kepada pemahaman mahasiswa terhadap suatu pernyataan matematika, dan bagaimana langkah-langkah di dalam membuktikan pernyataan tersebut.

Pedemonte (2003) berhasil menganalisis struktur argumentasi dan struktur pembuktian yang dihasilkan dari proses argumentasi yang dilakukan oleh siswa kelas 12 di dalam pokok bahasan geometri. Berdasarkan hasil pengamatan terhadap langkah-langkah pembuktian yang dilakukan oleh siswa, ada dua kemungkinan hubungan yang terjadi antara struktur argumentasi abduktif dengan struktur pembuktian deduktif yang dihasilkan. Pertama, siswa memulai membuktikan pernyataan yang diberikan melalui proses argumentasi abduktif. Hasil dari proses argumentasi ini digunakan untuk menyusun bukti secara deduktif. Siswa yang demikian dikatakan telah berhasil mengkonstruksi bukti secara deduktif. Kedua, siswa berhasil menyusun argumentasi abduktif dari pernyataan yang harus dibuktikan, tetapi ketika melakukan pembuktian (menyusun bukti) secara deduktif masih memuat langkah-langkah abduktif. Siswa demikian dikatakan belum berhasil mengkonstruksi bukti secara deduktif.

Di dalam penelitian yang dilakukan ini, perhatian utama ditujukan tidak hanya pada argumentasi abduktif, tetapi juga pada argumentasi deduktif berdasarkan premis-premis yang diberikan pada pernyataan yang harus dibuktikan. Kedua argumentasi ini dijadikan alat untuk

memunculkan gagasan utama dari pembuktian suatu pernyataan. Mengingat strategi pembuktian yang diajukan ini bersifat mereduksi keformalan bukti dengan tanpa mengurangi aspek-aspek penalaran yang ada di dalam bukti itu sendiri, maka kondisi kedua di dalam hasil analisa Pedemonte akan diminimalisasi. Dengan cara demikian, diharapkan dapat memudahkan bagi mahasiswa di dalam memahami struktur bukti yang ada

Pendekatan-pendekatan pembelajaran yang telah dikembangkan seperti pembelajaran tidak langsung dan gabungan langsung dan tak langsung dari Suryadi (2005) untuk meningkatkan kemampuan berpikir matematik tingkat tinggi siswa dan pendekatan pembelajaran berbasis masalah (PBM) dari Herman (2005) akan diadaptasikan untuk subjek penelitian yang lebih banyak pengalamannya di dalam bermatematika, yaitu mahasiswa. Di dalam pembuktian matematika ungkapan-ungkapan, baik dari dosen atau mahasiswa menuntut terjadinya interaksi di antara mahasiswa atau antara mahasiswa dengan dosen dalam diskusi secara transaktif dan fasilitatif. Diskusi transaktif menuntut peserta diskusi untuk menggunakan penalaran transaktif (*transactive reasoning*). Berkowitz (dalam Blanton dkk, 2003) mendefinisikan *transactive reasoning* sebagai keterampilan dalam mengkritik, menjelaskan, mengklarifikasi dan mengelaborasi suatu gagasan. Sedangkan ungkapan-ungkapan yang bersifat fasilitatif menurut Blanton dkk (2003) adalah ungkapan dosen berupa menyatakan kembali atau menegaskan pernyataan yang diajukan mahasiswa.

Kemampuan seorang di dalam melakukan diskusi transaktif menurut Kruger dan Tomessello (dalam Russell, 2005) diidentifikasi ketika orang itu melakukan hal-hal sebagai berikut: menyampaikan

suatu pernyataan yang bersifat transaktif (*transactive statements*), mengajukan pertanyaan yang bersifat transaktif (*transactive questions*), dan merespon secara transaktif dari pertanyaan yang bersifat transaktif (*transactive responds*). Memberikan kesempatan kepada seseorang untuk berargumentasi di dalam diskusi transaktif diyakini oleh Russell (2005) dapat menjadi stimulus untuk terjadinya perubahan struktur kognitif orang tersebut.

Di dalam pembuktian dengan strategi yang diterapkan dalam penelitian ini sarat dengan diskusi yang bersifat transaktif dan sekali-kali dosen memberikan suatu penegasan pernyataan yang diajukan mahasiswa. Interaksi diantara mahasiswa atau antara mahasiswa dengan dosen dapat dikondisikan ketika menggunakan strategi dalam menyelesaikan masalah secara umum atau masalah pembuktian secara khusus. Oleh karena itu cukup beralasan apabila pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif (PSAD) ini untuk dijadikan sebagai alternatif pendekatan di dalam pembelajaran pembuktian.

C. METODE PENELITIAN

Penelitian yang dilakukan ini benar-benar untuk melihat hubungan sebab akibat antara model pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif (X) dengan kemampuan dalam aspek membaca bukti (O_1) dan membuktikan matematik (O_2). Oleh karena itu, penelitian ini merupakan jenis penelitian eksperimen dengan disain kelompok kontrol pretes-post tes seperti berikut ini:

$$\begin{array}{cccc} O_1 & X & O_1 & O_2 \\ O_1 & & O_1 & O_2 \end{array}$$

Penelitian ini dilakukan pada perkuliahan yang sarat dengan pembuktian. Mata kuliah Teori Bilangan merupakan salah satu mata

kuliah di dalam kelompok bidang keahlian aljabar yang memiliki karakteristik yang sangat unik. Mata kuliah ini selain sarat dengan pembuktian, tetapi juga konsep-konsep di dalamnya belum seabstrak pada mata kuliah lainnya yang serumpun. Oleh karena itu, sejalan dengan karakteristik model strategi pembuktian yang menjembatani pembuktian ke yang lebih formal, maka mata kuliah Teori Bilangan ini dijadikan sebagai sampel obyek penelitian.

Berdasarkan uraian di atas, maka yang menjadi populasi dalam penelitian ini adalah mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan Program Studi Matematika pada Perguruan Tinggi Negeri yang menyelenggarakan kedua program studi tersebut yang mengambil Mata Kuliah Teori Bilangan. Dengan pertimbangan agar hasil penelitian ini dapat memberikan manfaat secara langsung bagi lembaga tempat peneliti bekerja, maka yang menjadi subyek sampel penelitian adalah mahasiswa peserta Mata Kuliah Teori Bilangan pada suatu Perguruan Tinggi yang menyelenggarakan Program Studi Pendidikan Matematika dan Program Studi Matematika di Bandung.

Dari empat kelas peserta Mata Kuliah Teori Bilangan yang ada, dipilih sejumlah mahasiswa yang belum pernah mengikuti pembelajaran mata kuliah ini di semester sebelumnya. Banyaknya subyek sampel yang memenuhi syarat itu adalah 32 orang di kelas yang jumlah pesertanya terkecil. Sedangkan subyek sampel dari kelas lainnya, masing-masing dipilih 32 orang secara acak dari sejumlah peserta yang telah memenuhi syarat di atas di kelas itu. Sehingga jumlah subyek sampel seluruhnya adalah 128 orang.

D. KESIMPULAN, IMPLIKASI DAN SARAN

1. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Kualitas kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan ditinjau dari nilai rata-rata, prosentase banyaknya mahasiswa yang memperoleh capaian di atas 60%, dan kinerja dalam mengerjakan soal kedua kemampuan itu diperoleh bahwa mahasiswa yang belajar dengan strategi abduktif-deduktif menunjukkan kualitas kemampuan membaca bukti yang tidak berbeda dengan mahasiswa yang belajar secara konvensional di masing-masing program studi. Sedangkan kualitas kemampuan membaca bukti mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika lebih baik dari pada mahasiswa Program Studi Matematika. Sementara untuk kemampuan membuktikan, mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif menunjukkan kualitas yang lebih baik dari pada mahasiswa yang belajar secara konvensional di masing-masing program studi. Sedangkan kemampuan membuktikan mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika menunjukkan kualitas yang tidak berbeda dengan mahasiswa Program Studi Matematika.
2. Ditinjau dari capaian kemampuan membaca bukti, mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika menunjukkan pencapaian yang lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa Program Studi Matematika. Perbedaan ini sangat dimungkinkan karena tuntutan belajar mahasiswa Pendidikan Matematika tidak hanya

memahami bukti, tetapi juga mampu mengkomunikasikan argumentasi kepada orang lain seperti pada sajian bukti pada tes kemampuan membaca bukti. Apabila dilihat dari faktor pembelajaran, mahasiswa yang belajar dengan strategi abduktif-deduktif menunjukkan capaian kemampuan membaca bukti yang tidak jauh berbeda dengan capaian oleh mahasiswa yang belajar secara konvensional. Hal ini menunjukkan bahwa langkah-langkah pembuktian yang disajikan telah mengikuti alur pembuktian formal seperti yang disajikan dalam buku teks.

3. Untuk kemampuan membuktikan, capaian kemampuan ini antara mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan mahasiswa Program Studi Matematika tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan. Sedangkan jika dilihat dari faktor pembelajaran, mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif telah menunjukkan capaian yang lebih baik dibandingkan dengan mereka yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, baik di Program Studi Pendidikan Matematika maupun di Program Studi Matematika
4. Dilihat dari faktor kemampuan awal mahasiswa dan pembelajaran, mahasiswa dengan kemampuan awal rendah, sedang, dan tinggi yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif telah menunjukkan kemampuan membuktikan yang jauh lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa dari kelompok yang sama yang memperoleh pembelajaran secara konvensional. Sedangkan untuk kemampuan membaca bukti, tidak terdapat perbedaan kemampuan ini diantara kedua pembelajaran, baik di kelompok rendah, sedang, maupun tinggi. Sedangkan antara kemampuan

kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan antar kelompok awal mahasiswa adalah berbeda sangat signifikan.

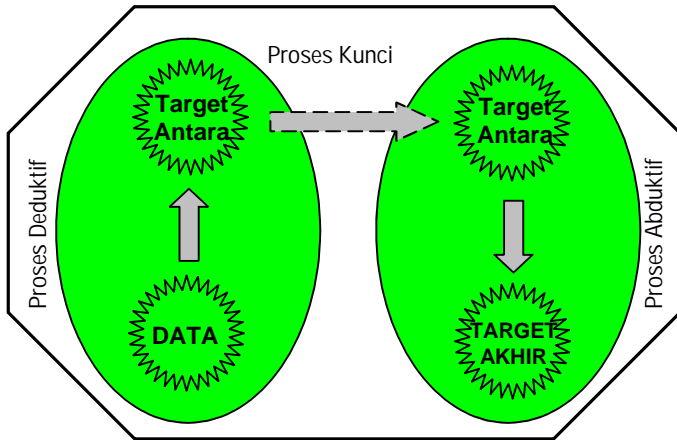
5. Apabila dilihat dari faktor program studi dan kemampuan awal mahasiswa, perbedaan kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan antar kelompok kemampuan awal atas program studi adalah sangat signifikan. Untuk mahasiswa kelompok awal rendah, sedang dan tinggi Program Studi Pendidikan Matematika telah menunjukkan pencapaian kemampuan membaca bukti yang lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa pada kelompok yang sama Program Studi Matematika. Akan tetapi untuk kemampuan membuktikan, capaian kemampuan ini di masing-masing kelompok kemampuan awal antara mereka yang berasal dari Program Studi Pendidikan Matematika dan dari Program Studi Matematika tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan.
6. Untuk kemandirian belajar, mahasiswa yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif tidak menunjukkan kemandirian belajar yang lebih baik dari pada mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional, baik pada mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika maupun mahasiswa Program Studi Matematika. Hal ini sangat dimungkinkan mengingat kematangan bermatematika mahasiswa yang terlibat dalam penelitian ini masih kurang. Sehingga strategi yang dikembangkan dalam pembelajaran pembuktian belum cukup memberikan kontribusi pada kemandirian belajar mahasiswa. Demikian pula kemandirian belajar antara mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan mahasiswa Program Studi Matematika tidak menunjukkan perbedaan yang signifikan.

Dalam kaitannya dengan kemampuan awal, mahasiswa di masing-masing kelompok kemampuan awal yang memperoleh pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif juga tidak menunjukkan perbedaan kemandirian belajar yang sangat signifikan dengan mahasiswa pada kelompok yang sama yang memperoleh pembelajaran secara konvensional. Demikian pula antara mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan mahasiswa Program Studi Matematika pada masing-masing kelompok kemampuan awal, tidak menunjukkan perbedaan kemandirian belajar yang signifikan. Akan tetapi, kemandirian belajar antar mahasiswa kelompok kemampuan awal tinggi dan rendah menunjukkan perbedaan yang sangat signifikan, baik dilihat dari faktor program studi maupun dari faktor pembelajaran.

2. Implikasi

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif secara efektif dapat menumbuhkembangkan kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan mahasiswa di kedua program studi. Strategi abduktif-deduktif ini merupakan model skema aktivitas belajar yang lebih spesifik pada proses pembentukan obyek mental baru ketika mahasiswa membuktikan suatu pernyataan matematik.

Dalam kerangka kerja teori *Action Process Object Schema* (APOS), strategi abduktif-deduktif dapat diilustrasikan seperti pada Gambar 2. Masalah pembuktian secara operasional dapat disederhanakan menjadi masalah bagaimana menunjukkan kebenaran dari *target akhir* yang diharapkan berdasarkan serangkaian informasi yang



Skema Abduktif-Deduktif

Gambar 2 Model Strategi Abduktif-Deduktif pada Kerangka Kerja Teori APOS

diberikan di dalam *data*. Data dan target akhir merupakan dua obyek mental yang dihadapkan kepada mahasiswa. Secara umum ada dua aksi yang langsung dapat dilakukan ketika berhadapan dengan masalah pembuktian. Pertama, menganalisis setiap informasi yang diberikan di dalam data, kemudian menyusunnya sehingga menghasilkan target-target antara, dan dari target-target ini disintesis lagi sehingga memperoleh target antara berikutnya, dan seterusnya. Target-target antara ini merupakan objek mental lain yang mungkin sudah dimiliki sebelumnya oleh mahasiswa.

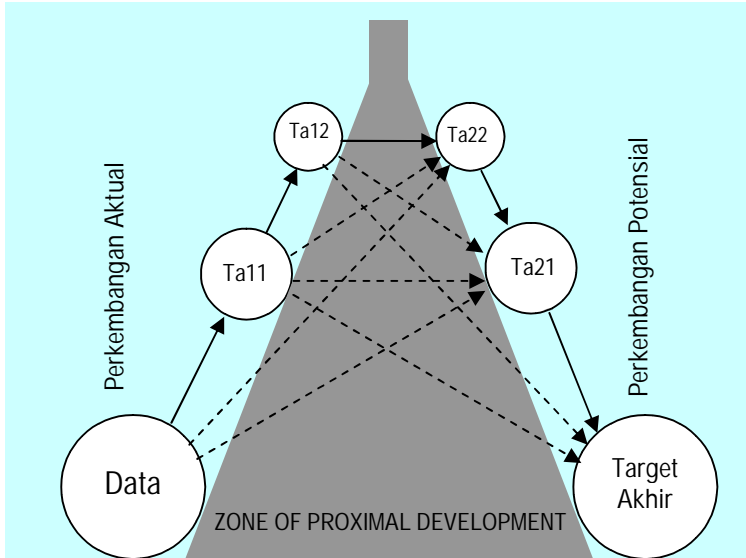
Proses memperoleh target antara dari data yang diberikan seperti itu merupakan *proses deduktif* di dalam PSAD. Sedangkan aksi yang kedua adalah menganalisis target akhir yang diharapkan, dan merumuskan suatu target antara sehingga berdasarkan suatu aturan tertentu (definisi atau teorema) akan tiba pada target akhir itu. Proses mengkondisikan target antara dari target akhir merupakan *proses*

abduktif di dalam PSAD. Tahapan proses lainnya dalam PSAD adalah melakukan aksi-aksi mental sehingga dapat menjembatani target antara hasil proses deduktif dengan target antara hasil proses abduktif. Karena proses ini sangat menentukan keberhasilan di dalam pembuktian matematik, maka proses ini akan diberi nama dengan *proses kunci*.

Di dalam proses pembelajaran, intervensi dosen dalam mendorong mahasiswa untuk melakukan aksi-aksi mental sehingga mereka dapat melakukan ketiga proses di atas sangat menentukan. Ungkapan-ungkapan transaktif dan fasilitatif atau teknik *scaffolding* dapat diterapkan sehingga diskusi transaktif dapat terjadi yang mengarah pada pembentukan objek-objek mental baru terutama yang berkaitan dengan peningkatan kemampuan membuktikan.

Proses pengkonstruksian skema pembuktian yang dibangun melalui proses abduktif dan deduktif seperti di atas akan berkembang terus sejalan dengan tingkat kompleksitas kaitan diantara objek-objek mental dari masalah pembuktian yang disajikan. Perkembangan skema ini akan memicu perkembangan aktual dan perkembangan potensial mahasiswa ke tingkat yang lebih tinggi. Secara umum kaitan antara perkembangan skema dan jarak antara perkembangan potensial dan perkembangan aktual atau *Zone of Proximal Development (ZPD)* dapat divisualisasikan seperti pada Gambar 3.

Masalah pembuktian yang disajikan dalam pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif akan memicu terjadinya pembentukan skema yang dikembangkan dari data yang diberikan dan target akhir yang diharapkan. Perkembangan aktual mahasiswa dapat berkembang melalui proses deduktif dengan cara mengoptimalkan pengetahuan yang dimilikinya tentang data yang diberikan untuk mengkonstruksi



Gambar 3 Model Perkembangan ZPD Melalui Pembentukan Skema dalam PSAD

objek-objek mental $Ta_{11}, Ta_{12}, \dots, Ta_{1n}$. Sedangkan perkembangan potensial akan berkembang ketika merumuskan objek-objek mental $Ta_{21}, Ta_{22}, \dots, Ta_{2n}$ melalui interaksi dengan pihak lain yang memiliki kemampuan lebih. Skema-skema baru dapat terbentuk apabila mahasiswa dapat melakukan aksi mental pada tahap proses kunci yang menjembatani objek mental Ta_{1i} dengan salah satu dari objek mental $Ta_{21}, Ta_{22}, \dots, Ta_{2n}$. Semakin kompleks jalinan antara objek mental Ta_{1i} dengan objek mental Ta_{2j} maka skema pembuktian yang terbentuk akan semakin kompleks. Hal ini akan memacu perkembangan ZPD ke tingkat yang lebih tinggi.

Dalam kaitannya dengan kesulitan mahasiswa dalam mengkonstruksi pembuktian yang diidentifikasi oleh Moore (1994), perkembangan ZPD melalui pembentukan skema dalam PSAD

diyakini dapat mengurangi tingkat kesulitan mahasiswa dalam memahami suatu konsep dan dalam memulai melakukan pembuktian. Definisi suatu konsep diidentifikasi dengan menyatakan ke dalam pernyataan berbentuk $p \leftrightarrow q$. Definisi bentuk ini digunakan dalam membuktikan pernyataan $r \rightarrow s$ dengan merumuskan p dari premis r yang relevan. Gambaran tentang suatu konsep, baik yang diturunkan dari definisi maupun teorema disajikan dalam struktur argumentasi abduktif-deduktif. Sedangkan intuisi pemahaman terhadap konsep akan tumbuh berkembang sejalan dengan pemahaman terhadap struktur argumentasi abduktif-deduktif konsep tersebut. Kesulitan di dalam memulai suatu pembuktian dapat diatasi dengan melakukan identifikasi data dengan implikasinya, dan target akhir dengan perumusan target antara yang paling memungkinkan untuk tiba pada target akhir.

3. Saran

Berdasarkan kesimpulan dan implikasi dari penelitian ini, dapat dikemukakan saran-saran sebagai berikut

1. Pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif secara signifikan lebih baik dari pada pembelajaran konvensional dalam menumbuhkembangkan kemampuan membuktikan, baik ditinjau dari program studi maupun kemampuan awal mahasiswa. Oleh karena itu, pembelajaran ini dapat dijadikan sebagai alternatif model pembelajaran pembuktian di perguruan tinggi.
2. Melakukan pembelajaran pembuktian bukan merupakan pekerjaan yang mudah bagi dosen. Oleh karena itu, agar pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif ini mencapai hasil

yang efektif, maka kerangka kerja teoritik strategi ini perlu dijadikan sebagai landasan utama.

3. Untuk mengoptimalkan perkembangan ZPD, masalah pembuktian yang disajikan hendaknya dirancang secara bertahap menurut kompleksitas jalinan di antara objek-objek mental baru yang mungkin terbentuk.
4. Materi pembuktian dari mata kuliah yang menjadi obyek dalam penelitian ini belum seabstrak seperti pada mata kuliah yang lebih lanjut. Akan tetapi, pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif ini sangat memungkinkan untuk diterapkan pada perkuliahan yang materi pembuktiannya lebih abstrak dengan memperhatikan pengetahuan siap mahasiswa.
5. Efektifitas pembelajaran dengan startegi abduktif-deduktif dalam menumbuhkembangkan kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan ini terbatas pada mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika dan Program Studi Matematika di perguruan tinggi yang sama. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lanjutan apabila akan melihat efektifitas pembelajaran ini untuk mahasiswa kedua program studi itu yang berasal dari perguruan tinggi yang berbeda.
6. Aspek kemampuan berpikir matematika tingkat tinggi yang ditumbuhkembangkan dalam penelitian ini adalah aspek pembuktian. Perlu dikembangkan pendekatan yang lebih spesifik untuk aspek kemampuan lainnya sebagai bentuk pendekatan yang bersifat rincian dari pendekatan yang telah dikembangkan sebelumnya. Hal ini dimaksudkan agar guru/dosen dapat lebih mudah mengimplementasikannya di lapangan

4. Kontribusi Teoritis

Berikut ini diajukan beberapa pernyataan teoritik berdasarkan hasil, pembahasan, dan implikasi penelitian ini:

1. Pemilihan pembelajaran dengan strategi abduktif-deduktif dalam menyelesaikan masalah pembuktian dapat memicu perkembangan aktual mahasiswa pada tingkat yang lebih tinggi.
2. Model pengembangan ZPD untuk mahasiswa yang dihasilkan dalam penelitian ini sangat tergantung pada keterlibatan mahasiswa dalam diskusi transaktif di antara mahasiswa dan atau antara mahasiswa dengan dosen.
3. Pembentukan objek-objek mental baru yang dibangun melalui proses abduktif dan deduktif dapat berjalan efektif melalui intervensi yang tepat dari dosen ketika mahasiswa melakukan aksi-aksi mental pada objek-objek yang dihadapinya.
4. Strategi abduktif-deduktif dapat mendorong mahasiswa untuk memahami masalah pembuktian yang dihadapinya, sehingga kemampuan berpikir transaktif mahasiswa dapat tumbuh berkembang seiring dengan berkembangnya kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan.
5. Strategi abduktif-deduktif dalam memecahkan masalah pembuktian secara bertahap dapat mengantarkan mahasiswa pada proses pencarian konsep yang dapat menjembatani objek mental-objek mental yang dihasilkan oleh proses deduktif dan proses abduktif.
6. Perkembangan ZPD mahasiswa akan berkembang lebih optimal apabila masalah pembuktian yang disajikan dirancang secara bertahap sesuai dengan tahapan kompleksitas skema pembuktian yang terbentuk.

7. Kemampuan awal mahasiswa ternyata sangat berpengaruh terhadap kemampuan membaca bukti dan kemampuan membuktikan matematik.

DAFTAR PUSTAKA

- Alibert, D. & Thomas, M. (1991). Research on Mathematical Proof. Dalam Tall, D (ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Arnawa (2006). *Meningkatkan Kemampuan Pembuktian Mahasiswa dalam Aljabar Abstrak Melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori APOS*. (Disertasi). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Blanton, M.L., Stylianou, D.A. & David, M.M. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. *In the proceedings of the 27th Annual meeting for the International Group for the Psychology of Mathematical Education*. (vol. 2, pp. 113-120), Honolulu, Hawaii: University of Hawaii.
- Burton, D.M. (1991). *Elementary Number Theory*. The McGraw-Hill Companies, Inc.
- Juandi, D. (2006). *Meningkatkan Daya Matematik Mahasiswa Calon Guru Matematika Melalui Pembelajaran Berbasis Masalah*. (Disertasi). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The Role of Contradiction and Uncertainty in Promoting the Need to Prove in Dynamic Geometry Environments. *Educational Studies in Mathematics* 44: 127-150.
- Hanna, G. (1983). *Rigorous Proof in Mathematics Education*, OISE Press, Toronto.
- Herman, T. (2005). *Pembelajaran Berbasis Masalah untuk Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematis Tingkat Tinggi Siswa Menengah Pertama (SMP)*. (Disertasi). Bandung : Universitas Pendidikan Indonesia.

- Hoyles, C. dan Kuchemann, D. (2002). Students' understanding of logical implication. *Educational Studies in Mathematics* 51, 193-223.
- Knipping, C. (2003). *Argumentation structures in classroom proving situations*. Department of Education: University of Hamburg.
- Moore, R.C. (1994). Making the transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27: 249-266.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Pedemonte, B. (2003). What kind of proof can be constructed following an abductive argumentation. *Proceeding of the third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*.
- Raman, M. (2003). Key Ideas: What are They and How Can They Help us Understand How People View Proof : *Education Studies in Mathematics* 52: 319 – 325.
- Reiss, K. & Renkl, A. (2002). Learning to prove: The idea of heuristic examples. *ZDM*, 34(1): 29-35.
- Ruseffendi, E.T. (1988). *Pengantar kepada Membantu Guru Mengembangkan Kompetensinya dalam Pengajaran Matematika untuk Meningkatkan CBSA*. Bandung: Tarsito.
- Ruseffendi, E.T. (1998). *Dasar-Dasar penelitian Pendidikan dan Bidang Non-Eksakta lainnya*. IKIP Semarang Press.
- Russell III, H.A. (2005). *Transactive Discourse During Assessment Conversation on Science Learning*. Disertasi: Georgia State University.
- Sabri (2003). *Prospective Secondary School Teachers' Conceptions of Mathematical Proof in Indonesia*. Thesis: Curtin University of Technology.
- Setiono, K. (1983). *Teori Perkembangan Kognitif*. Fakultas Psikologi UNPAD.
- Solow, D. (1982). *How to read and do proof. An introduction to mathematical thought process*. John Wiley & Sons, Inc.

- Sumarmo, U. (2004). *Kemandirian Belajar: Apa, Mengapa, dan Bagaimana Dikembangkan pada Peserta Didik*. Disampaikan pada Seminar Nasional di Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- Sumarmo, U. (2003). *Pembelajaran Keterampilan Membaca Matematika Pada Siswa Sekolah Menengah*. Disampaikan pada Seminar Nasional Pendidikan MIPA di FPMIPA UPI.
- Suryadi, D. (2003). *Pengembangan Bahan Ajar dan Kerangka-Kerja Pedagogis Matematika untuk Menumbuhkembangkan Kemampuan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP* (Laporan Penelitian Hibah Bersaing Tahap 1). Bandung: UPI
- Suryadi, D (2005). *Penggunaan Pendekatan Pembelajaran Tidak Langsung serta Pendekatan Gabungan Langsung dan Tidak Langsung dalam Rangka Meningkatkan Kemampuan Berpikir Matematik Tingkat Tinggi Siswa SLTP* (Disertasi). Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Tall, D. (1998). *The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or Some ?* Conference of the University of Chicago School Mathematics Project.
- Tucker, T.W. (1999). On the Role of Proof in Calculuc Courses *Contemporary Issues in Mathematics Education MSRI*. Vol. 36.
- Uhlig, F. (2003). The Role of Proof in Comprehending and teaching Elementary linear Algebra. *Educational Studies in Mathematics*.
- UPI (2007). *Kurikulum Universitas Pendidikan Indonesia: Ketentuan Pokok dan Struktur Program*. Bandung: UPI.
- Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.
- Weber, K. (2003). *Students' Difficulties with Proof*. [online]. Tersedia: http://www.Maa.org/t_and_l/sampler/rs_8.html.
- Weber, K. (2002). Student Difficulty in Constructing Proofs: The need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Matematics* 48: 101-119

RIWAYAT HIDUP