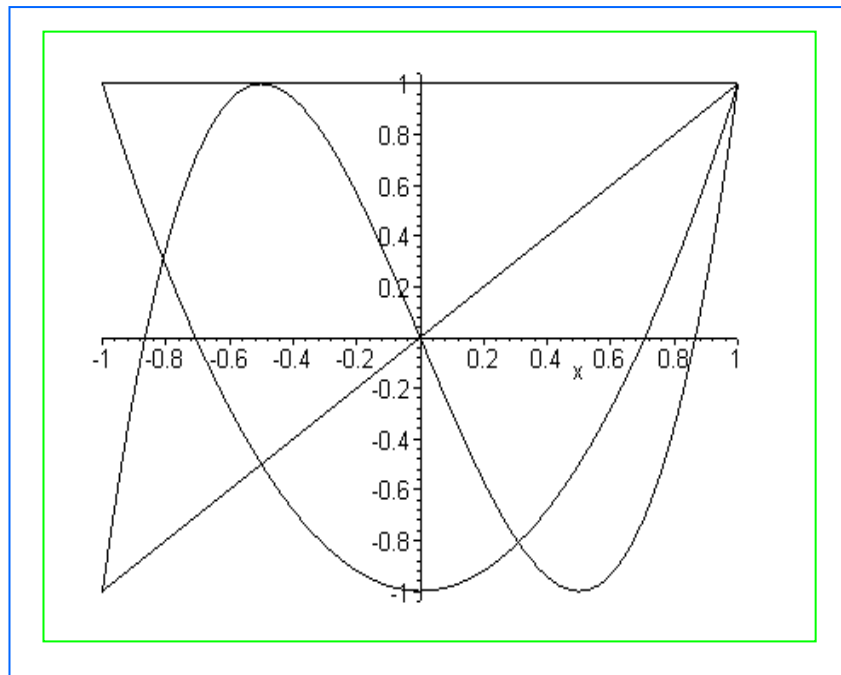


Drs. HERI SUTARNO, M. T.

DEWI RACHMATIN, S. Si., M. Si.

METODE NUMERIK

***DENGAN PENDEKATAN
ALGORITMIK***



ISBN

PT SINAR BARU ALGENSINDO

PRAKATA

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan kemampuan kepada penulis untuk menyelesaikan buku ini. Shalawat dan salam kita haturkan kepada Rasulullah Muhammad SAW yang telah memberi contoh dan tauladan kepada kita selaku umatnya.

Buku yang berjudul “Metode Numerik dengan Pendekatan Algoritmik” ini dibuat agar para pembaca khususnya mahasiswa dapat memahami topik tentang metode numerik dengan baik. Beberapa metode yang dibahas pada buku ini, telah diberikan algoritmanya bahkan ada yang diberikan programnya. Oleh karena itu para pembaca diharapkan menguasai salah satu bahasa pemrograman seperti Pascal, Basic atau bahasa pemrograman yang lainnya.

Metode numerik ini merupakan mata kuliah wajib untuk mahasiswa jurusan matematika dan teknik. Aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari banyak dijumpai dalam bidang teknik dan rekayasa.

Landasan teori untuk metode numerik ini tidak lain adalah kalkulus dan aljabar linear. Sebut saja beberapa teorema seperti teorema nilai rata-rata, teorema nilai tengah, dan teorema Taylor pada mata kuliah kalkulus digunakan pada pembuktian beberapa metode dalam metode numerik.

Mudah-mudahan buku ini dapat bermanfaat bagi para pembaca. Kritik maupun saran bagi kemajuan penulis sangat diharapkan agar buku ini dapat disempurnakan.

Terima kasih penulis ucapkan secara khusus kepada bapak Drs. Heri Sutarno, M.T. rekan sejawat di jurusan Pendidikan Matematika FPMIPA UPI yang banyak membantu dalam penulisan buku ini. Juga kepada semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu namanya.

Bandung, Desember 2005

Penulis

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR i

DAFTAR ISI iii

BAB 1 PENDAHULUAN 1

- 1.1 Pengertian Metode Numerik dan Kegunaannya 1
- 1.2 Penyelesaian Masalah Matematika 2
- 1.3 Algoritma dan Pemrograman (Koding) 3
- 1.4 Angka Bena, Pembulatan, dan Galat 4
- 1.5 Jenis Hitungan 8
- 1.6 Soal-soal Latihan 9

BAB 2 AKAR PERSAMAAN TAKLINEAR 10

- 2.1 Metode Grafik Tunggal 11
- 2.2 Metode Grafik Ganda 12
- 2.3 Aturan Tanda Descartes 13
- 2.4 Metode Tabulasi 14
- 2.5 Metode Bagidua 16
- 2.6 Metode Posisi Palsu 19
- 2.7 Metode Newton-Raphson 21
- 2.8 Metode Secant 24
- 2.9 Metode Iterasi Titik Tetap 27
- 2.10 Perbandingan Kelima Metode Iteratif 32
- 2.11 Soal-soal Latihan 33

BAB 3 INTERPOLASI 35

- 3.1 Pendahuluan 35
- 3.2 Beda Hingga 35
 - 3.2.1 Beda-beda Maju 36
 - 3.2.2 Beda-beda Mundur 37
 - 3.2.3 Beda-beda Pusat 38
- 3.3 Interpolasi Linear dan Interpolasi Kuadrat 40
 - 3.3.1 Interpolasi Linear 41
 - 3.3.2 Interpolasi Kuadrat 43
- 3.4 Interpolasi Beda-Maju dan Beda-Mundur Newton 45
- 3.5 Polinom Interpolasi Beda Terbagi Newton 49
 - 3.5.1 Formula Interpolasi Ordo 1 50
 - 3.5.2 Formula Interpolasi Ordo 2 50
- 3.6 Polinom Interpolasi Lagrange 53
 - 3.6.1 Polinom Interpolasi Lagrange Ordo 1 54
 - 3.6.2 Polinom Interpolasi Lagrange Ordo 2 54
- 3.7 Soal-soal Latihan 57

BAB 4 SISTEM PERSAMAAN LINEAR 59

- 4.1 Pendahuluan 59
- 4.2 Sistem Persamaan Linear Segitiga Atas 61
- 4.3 Sistem Persamaan Linear Segitiga Bawah 64
- 4.4 Metode Eliminasi Gauss dan Pivoting 66
 - 4.4.1 Metode Eliminasi Gauss Naif 67
 - 4.4.2 Metode Eliminasi Gauss Pivoting Parsial 72
 - 4.4.3 Metode Eliminasi Gauss Pivoting Parsial Terskala 75
- 4.5 Metode Dekomposisi/Faktorisasi Segitiga 77

- 4.6 Metode Iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel 81
 - 4.6.1 Metode Iterasi Jacobi 82
 - 4.6.2 Metode Iterasi Gauss-Seidel 83
- 4.7 Soal-soal Latihan 86

**BAB 5 PENGHAMPIRAN FUNGSI DENGAN
METODE KUADRAT TERKECIL 88**

- 5.1 Pendahuluan 88
- 5.2 Regresi Linear 90
- 5.3 Algoritma untuk Regresi Linear 94
- 5.4 Regresi Polinom 96
- 5.5 Pencocokan Fungsi Eksponensial dan Fungsi Trigonometri 97
 - 5.5.1 Pencocokan Sebuah Kurva Eksponensial 98
 - 5.5.2 Pencocokan Sebuah Kurva Hiperbol 99
 - 5.5.3 Pencocokan Sebuah Fungsi Trigonometri 99
 - 5.5.4 Kurva Geometri 100
- 5.6 Soal-soal Latihan 101

BAB 6 PENGHAMPIRAN FUNGSI 103

- 6.1 Pendahuluan 103
- 6.2 Deret Taylor 104
- 6.3 Deret Chebyshev 106
- 6.4 Soal-soal Latihan 109

BAB 7 INTEGRASI NUMERIK 111

- 7.1 Aturan Trapesium 112
- 7.2 Komposisi Trapesium 115
- 7.3 Aturan Simpson (1/3) 118
- 7.4 Aturan Komposisi Simpson (1/3) 121

- 7.5 Kuadratur Gauss-Legendre 123
 - 7.5.1 Metode Gauss-Legendre 3-titik 127
 - 7.5.2 Metode Gauss-Legendre n-titik 127
- 7.6 Transformasi Selang dari $\int_a^b f(x)dx$ ke dalam $\int_{-1}^1 f(z)dz$ 129
- 7.7 Soal-soal Latihan 133

BAB 8 SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA 135

- 8.1 Kelompok Persamaan Diferensial 135
- 8.2 PDB Orde Satu 136
- 8.3 Metode Euler 137
 - 8.3.1 Tafsiran Geometri Metode PDB 139
 - 8.3.2 Analisis Galat Metode Euler 140
- 8.4 Metode Heun (Perbaikan Metode Euler) 143
 - 8.4.1 Tafsiran Geometri Metode Heun 144
 - 8.4.2 Galat Metode Heun 45
 - 8.4.3 Perluasan Metode Heun 149
- 8.5 Soal-soal Latihan 150

1.1 Pengertian Metode Numerik dan Kegunaannya

Metode numerik adalah teknik-teknik yang digunakan untuk merumuskan masalah-masalah matematika agar dapat diselesaikan dengan operasi-operasi aritmatika (hitungan) biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Secara harfiah metode numerik berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka. Perhitungan ini melibatkan sejumlah besar operasi-operasi hitungan yang berulang-ulang, melelahkan, dan menjemukan. Tetapi dengan adanya komputer digital yang semakin lama semakin cepat dalam melakukan hitungan dan dengan adanya penemuan metode-metode baru dan beberapa modifikasi dari metode-metode lama, maka penggunaan metode numerik dalam menyelesaikan masalah-masalah matematika mengalami kenaikan secara dramatis. Kemajuan yang cepat pada bidang metode numerik dikarenakan perkembangan komputer itu sendiri. Kita melihat perkembangan teknologi komputer tidak pernah berakhir. Keunggulan tiap generasi baru komputer dalam hal waktu, memori, ketelitian, dan kestabilan perhitungan menyebabkan pengembangan algoritma numerik yang lebih baik.

Ada beberapa alasan mengapa mempelajari metode numerik, yaitu:

- 1) Metode numerik merupakan alat untuk memecahkan masalah matematika yang sangat handal. Banyak permasalahan teknik yang mustahil dapat diselesaikan secara analitik, karena kita sering dihadapkan pada sistem-sistem persamaan yang besar, tidak linear dan cakupan yang kompleks, dapat diselesaikan dengan metode numerik.
- 2) Program paket numerik, misalnya MATLAB, MAPLE, dan sebagainya yang digunakan untuk menyelesaikan masalah matematika dengan metode numerik dibuat oleh orang yang mempunyai dasar-dasar teori metode numerik.
- 3) Banyak masalah matematika yang tidak dapat diselesaikan dengan memakai program paket atau tidak tercakup dalam program paket. Oleh karena itu kita perlu belajar metode numerik untuk dapat membuat program paket (*software*) untuk masalah sendiri.
- 4) Metode numerik merupakan suatu sarana yang efisien untuk mempelajari penggunaan komputer. Belajar pemrograman secara efektif adalah menulis

program komputer. Metode numerik mengandung bagian yang dirancang untuk diterapkan pada komputer, misalnya membuat algoritma.

- 5) Metode numerik merupakan suatu sarana untuk lebih memahami matematika. Karena fungsi metode numerik adalah menyederhanakan matematika yang lebih tinggi dengan operasi-operasi hitungan dasar.

Metode numerik sudah baku dan telah luas pemakaiannya. Metode numerik yang baru pada hakekatnya bertujuan menemukan cara perhitungan yang dapat membuat **galat** (*error*) sekecil mungkin.

1.2 Penyelesaian Masalah Matematika

Ada dua macam penyelesaian masalah matematika, yaitu:

- 1) Secara analisis, dengan menggunakan kaidah-kaidah operasi matematika dengan cara yang formal, yaitu dengan menggunakan rumus-rumus yang sudah lazim dan konvensional sehingga diperoleh solusi eksak. Solusi eksak yaitu solusi dengan galat sama dengan nol.
- 2) Secara numeris, yaitu dengan menggunakan metode numerik untuk memperoleh nilai solusi hampiran dari solusi eksak. Cara ini biasanya dilakukan jika nilai eksak sukar dicari dengan cara analisis.

Tahap-tahap dalam menyelesaikan masalah matematika secara numerik dengan memakai alat bantu komputer secara umum adalah:

- 1) **Pemodelan**. Pemetaan model matematis, yakni merumuskan masalah dalam istilah matematis, mendefinisikan peubah-peubah bebas dan tak bebas, dan persamaan-persamaan yang terlibat (persamaan linear atau tak linear, integral, sistem persamaan, persamaan diferensial, dan sebagainya); dengan memperhitungkan jenis komputer yang ingin dipakai.
- 2) **Pemilihan metode (algoritma) numerik**, perumusan secara matematis dilanjutkan dengan rancang bangun algoritma; bersama dengan analisis galat pendahuluan (taksiran galat, penentuan ukuran langkah, dan sebagainya).
- 3) **Pemrograman (koding)**, biasanya dimulai dengan pembuatan diagram alir yang memperlihatkan diagram blok dari prosedur yang harus dilaksanakan

oleh komputer dan kemudian penulisan program dalam bahasa komputer (koding); pencarian dan perbaikan kesalahan dan pengujian.

- 4) **Dokumentasi:** pemberian keterangan (penjelasan).

Penyimpanan: disket, *hard-disk*, dan lain-lain.

Perawatan: proteksi, penyesuaian dengan perkembangan yang baru.

- 5) **Penafsiran hasil**, menjalankan ulang dengan data yang lebih jauh dan bervariasi.

1.3 Algoritma dan Pemrograman (Koding)

Algoritma adalah prosedur yang terdiri atas himpunan berhingga aturan yang taktaksa (tidak lebih dari satu penafsiran) yang merinci suatu rangkaian berhingga operasi yang menyediakan penyelesaian atas suatu masalah atau suatu kelas masalah. Setiap algoritma mempunyai ciri-ciri sebagai berikut:

- 1) Tiap langkah dalam algoritma didefinisikan secara tepat sehingga tidak menimbulkan lebih dari satu penafsiran (*ambiguous*). Aksi yang harus dilaksanakan dirinci secara jelas untuk tiap kasus.
- 2) Algoritma harus berhenti setelah mengerjakan sejumlah langkah terbatas.
- 3) Masukan (*input*) boleh ada, boleh tidak. Keluaran (*output*) harus ada.
- 4) Dibuat untuk dapat diterapkan dalam menyelesaikan sebarang masalah atau dibuat seumum mungkin.

Cara menyatakan algoritma memakai *kode-pseudo*, yakni kalimat-kalimat yang kata-katanya sudah mempunyai makna tertentu atau dapat juga dengan cara menggambarkan dalam bentuk suatu diagram alir. Notasi untuk menuliskan algoritma disebut notasi algoritmik. Notasi algoritmik bukan notasi bahasa pemrograman, karena itu program dalam notasi algoritmik tidak dapat dijalankan oleh komputer. Agar dapat dijalankan oleh komputer, program dalam notasi algoritmik harus diterjemahkan ke dalam notasi bahasa pemrograman yang dipilih.

Pemrograman (*koding*) adalah pengubahan bentuk algoritma ke program komputer menggunakan bahasa komputer. Bahasa komputer yang digunakan dalam menulis program dinamakan **bahasa pemrograman**. Sampai sekarang

terdapat puluhan bahasa pemrograman seperti BASIC, FORTRAN, Pascal, Cobol, Prolog, dan lain-lain.

1.4 Angka Bena, Pembulatan, dan Galat

Angka bena (*significant figure*) suatu bilangan c adalah sebarang angka yang diberikan oleh c , kecuali untuk nol-nol di kiri angka tak nol pertama yang hanya bertindak untuk mencocokkan posisi titik (koma) desimal. Jadi angka tak nol dari c adalah angka bena dari c . Konsep angka bena atau digit telah dikembangkan secara formal untuk menandakan keandalan suatu nilai numerik. Angka bena adalah angka berarti, angka penting, atau angka yang dapat digunakan dengan pasti.

Contoh 1.1

1. $\pi = 3,14154265 \dots$

$$22/7 = 3,1428571 \dots$$

Dikatakan bahwa $22/7$ sebagai hampiran terhadap π mempunyai 3 angka bena.

2. $x = 0,02144$ sebagai nilai sejati.

$$y = 0,02156$$
 sebagai nilai hampiran.

Dikatakan y mempunyai 2 angka bena.

3. Bilangan-bilangan $0,001342$; $0,0001342$; $0,00001342$; $1,360$ semuanya dikatakan mempunyai 4 angka bena.

Komputer hanya menyimpan sejumlah tertentu angka bena. Bilangan

riil seperti e , π , $\sqrt{10}$, jumlah angka benanya melebihi jumlah angka bena komputer. Bilangan seperti itu akan disimpan dalam sejumlah angka bena komputer itu. Pengabaian angka bena sisanya itulah yang dinamakan **galat pembulatan**.

Kebanyakan komputer digital mempunyai dua cara untuk menyatakan bilangan, yaitu:

- 1) Sistem titik kambang (*floating point*).

Suatu bilangan dinyatakan dengan sejumlah tetap angka bena. Bilangan titik kambang a ditulis sebagai

$$a = \pm m \times b^{\pm p} \quad \dots(1.1)$$

dimana: m = mantis (riil),

b = basis sistem bilangan yang dipakai (2, 8, 10, 16, dan sebagainya)

p = pangkat (berupa bilangan bulat tak negatif)

Contoh 1.2: $0,6238 \times 10^3$; $0,1714 \times 10^{-13}$; $-0,2000 \times 10^1$, dalam sistem titik kambang dengan basis 10.

Bilangan-bilangan tersebut dinyatakan juga sebagai berikut:

0,6238E03 ; 0,1714E-13 ; -0,2000E01.

2) Sistem titik tetap (*fixed-point*).

Suatu bilangan dinyatakan dengan sejumlah tetap posisi desimal di ujung kanan. Sistem bilangan titik tetap tidak praktis dalam pekerjaan ilmiah karena keterbatasan rentangnya.

Contoh 1.3: 62,358 ; 0,013 ; 1,000.

Aturan pembulatan sampai k angka desimal adalah sebagai berikut:

- a) Jika bilangan yang dibuang lebih kecil dari setengah satuan dalam posisi ke-k, biarkan angka desimal ke-k tetap. Cara ini disebut “pembulatan ke bawah”.

Contoh 1.4: 0,6234567 dibulatkan hingga 3 angka desimal menjadi 0,623.

- b) Jika bilangan yang dibuang lebih besar dari setengah satuan dalam posisi ke-k, tambahkan satu pada angka desimal ke-k. Cara ini disebut “pembulatan ke atas”.

Contoh 1.5: 0,6234567 dibulatkan hingga 4 angka desimal menjadi 0,6235.

- c) Jika bilangan tersebut tepat setengah satuan, bulatkan ke angka desimal genap yang terdekat.

Contoh 1.6: 3,45 dan 3,55 dibulatkan ke 1 angka desimal menjadi 3,4 dan 3,6.

Solusi yang diperoleh secara numerik merupakan nilai hampiran dari solusi eksaknya. Ini berarti terdapat galat (*error*) pada solusi hampiran tersebut.

Galat numerik adalah besaran yang merupakan selisih antara nilai hampiran dengan nilai eksak. Hubungan ini dirumuskan menjadi

$$E_a = x - \bar{x} \text{ atau } x = \bar{x} + E_a \quad \dots(1.2)$$

dimana E_a adalah **galat absolut (galat mutlak)**, x nilai eksak, dan \bar{x} nilai hampiran. Jika tanda galat (positif atau negatif) tidak dipertimbangkan, maka galat mutlak dapat didefinisikan sebagai

$$|E_a| = |x - \bar{x}| \quad \dots(1.3)$$

Galat relatif adalah galat absolut dibagi oleh nilai eksak, dinyatakan sebagai

$$e_r = \frac{\text{galat absolut}}{\text{nilai eksak}} = \frac{E_a}{x}. \quad \dots(1.4)$$

Catatan: Selanjutnya galat absolut dinyatakan dengan E , dan galat relatif dinyatakan dengan e .