HANDS-OUT

PROGRAM APLIKASI KOMPUTER

MATEMATIKA

Oleh :

Dewi Rachmatin, S.Si., M.Si.

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN IPA

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2008

Identitas Mata Kuliah

1.	Nama Mata Kuliah	:	Program Aplikasi Matematika
2.	Program Studi	:	Pendidikan Matematika
3.	Jenjang	:	S1 Kedua Departemen Agama
4.	Semester	:	Tiga (Semester Ganjil)
5.	Jumlah SKS	:	Tiga (3) SKS
6.	Status	:	Mata Kuliah Keahlian Program Studi
7.	Jumlah Pertemuan	:	10 Pertemuan
			- Tatap Muka : 8 pertemuan
			- UTS : 1 pertemuan
			- UAS : 1 pertemuan
9.	Lama Tiap Pertemuan	:	2 x 50 menit
10.	Banyak Staf Pengajar	:	satu orang
11.	Evaluasi	:	- Ujian Tengah Semester (UTS)
			- Ujian Akhir Semester (UAS)
12.	Mata Kuliah Prasyarat	:	Kalkulus dan Aljabar Linier

Pertemuan ke	:	1
Penyusun	:	Dewi Rachmatin
Materi	:	Fungsi dan Grafik Fungsi Satu Peubah

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Fungsi-fungsi satu peubah yang telah dipelajari pada matakuliah Kalkulus seperti fungsi aljabar, fungsi transenden, fungsi trigonometri dan fungsi-fungsi yang lainnya dengan konsep penggambaran grafik canggih dapat ditentukan grafik-grafik fungsinya. Akan tetapi hasilnya dapat langsung diperoleh dengan bantuan software Maple 7. Jadi hasil analitis dengan penggambaran grafik canggih dapat dibandingkan hasil secara komputasi dengan software Maple 7.

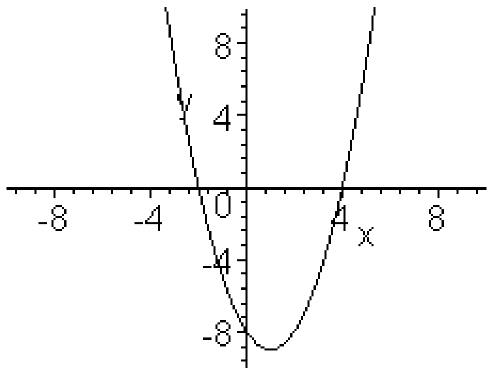
Contoh :

Sketsakan grafik fungsi berikut : $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

Penyelesaian

Fungsi tersebut merupakan fungsi parabola yang cekung ke atas dan melalui beberapa titik diantaranya titik (0,-8) dan (4,0).

Dengan Maple7 grafik fungsi f seperti sketsa berikut :



Penulisan perintah dengan Maple7 untuk menggambar fungsi satu peubah pada bidang Cartesius :

> plot(f, h, v);

> plot(f, h, v,...);

> plot(f, h, v, color = …, …);

di mana

f – fungsi yang digambar

h – range horisontal

v – range vertikal

color – warna grafik fungsi

Jika fungsi yang akan digambar ada 2 fungsi, maka lakukan perintah berikut:

> plot([f1, f2], h, v);

Berikut ini akan diberikan perintah untuk contoh fungsi aljabar berikut :

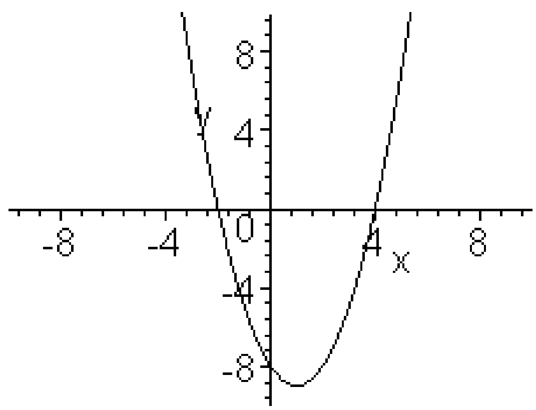
Contoh :

Sketsakan grafik fungsi berikut : $f(x) = x^2 - 2x - 8$ secara analitis dengan konsep penggambaran grafik canggih dan secara komputasi dengan Maple7.

Perintahnya :

```
> plot(x^2-2*x-8, x=-10..10, y=-10..10, color=black);
```

Warna grafik fungsi dapat diubah-ubah seperti pada contoh tadi, warna hitam bisa diganti dengan red/pink/green/cyan atau warna yang lainnya. Range nilai-nilai sumbu-X dan sumbu-Y juga dapat diganti.



Pertemuan ke : 2

Penyusun : Dewi Rachmatin

Materi : Limit Fungsi dan Turunan Fungsi Satu Peubah

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Masalah-masalah penentuan limit dan turunan fungsi satu peubah yang telah dipelajari pada matakuliah Kalkulus 1, diselesaikan secara analitis dan dibandingkan hasilnya dengan hasil komputasi dengan software Maple7. Berikut ini contoh masalah-masalah yang diselesaikan dengan cara analitis maupun komputasi.

Contoh 1 :

Tentukan nilai limit berikut atau nyatakan jika tidak ada.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Penyelesaian

Jawaban analitis limit tersebut diperoleh dengan menerapkan Prinsip Apit (Purcel, 1984) adalah 0 (buktikan), dan dengan software Maple7 diperoleh hasilnya juga 0.

Contoh 2 :

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut :

f(x) = x sin(cos(x)).

Penyelesaian

Jawaban analitis turunan fungsi tersebut diperoleh dengan menerapkan Aturan Rantai. Hasil komputasi dengan Maple7 diperoleh :

f ‘(x) = sin(cos(x)) – x cos(cos(x))sin(x).

Penulisan perintah dengan Maple7 untuk menentukan nilai limit dan turunan fungsi satu peubah

> limit(f, x=…);

> diff(f, x);

Perintah untuk contoh1:

> limit(sin(x)/x, x=0) ;

Contoh lain penentuan limit :

Tentukan nilai limit berikut atau nyatakan jika tidak ada.

$$\lim_{x \to \infty} e^x$$

Perintahnya :

> limit(exp(x), x=infinity) ;

Perintah untuk contoh2 :

> diff(x*sin(cos(x)),x) ;

Pertemuan ke : 3

Penyusun : Dewi Rachmatin

Materi : Integral dan Penggunaan Integral

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Masalah-masalah penentuan integral fungsi satu peubah, penentuan luas daerah dan penentuan volume benda putar yang telah dipelajari pada matakuliah Kalkulus diselesaikan secara analitis dan dibandingkan hasilnya dengan hasil komputasi dengan software Maple7. Berikut ini contoh masalah-masalah yang diselesaikan dengan cara analitis maupun komputasi.

Contoh1 :

Tentukan anti turunan untuk integral tak tentu berikut : $\int_{2}^{4} \frac{x}{x^3 - 1} dx$.

Penyelesaian

Jawaban dari masalah penentuan integral tak tentu tersebut diperoleh dengan menerapkan teknik pengintegralan fungsi rasional dan Teorema Dasar Kalkulus.

Hasil komputasi dengan Maple7 :

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan(3\sqrt{3}) + \frac{1}{6}\ln(3) - \frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan(\frac{5}{3}\sqrt{3}) .$$

Contoh2 :

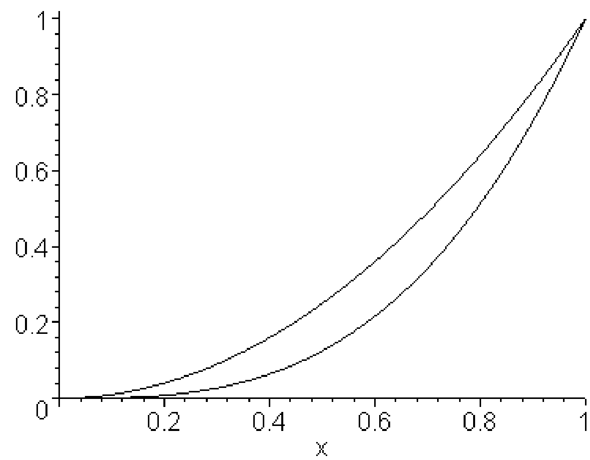
Tentukan luas daerah A yang dibatasi oleh grafik fungsi : $y = x^3$ dan grafik fungsi $y = x^2$.

Penyelesaian

Rumus untuk mencari luas daerah A adalah :

$$\int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx \,.$$

karena daerah yang dicari adalah :



Hasil komputasi dengan Maple7 : 1/12 satuan luas.

Contoh3 :

Tentukan volume benda putar yang terbentuk oleh daerah A pada contoh2 jika diputar terhadap sumbu-X.

Penyelesaian

Rumus untuk mencari volume benda yang dicari dengan metode cincin adalah :

$$\int_0^1 [(x^2)^2 - (x^3)^2]\, dx = \int_0^1 [x^4 - x^6]\, dx$$

Hasil komputasi dengan Maple7 : 2/35 satuan isi.

Penulisan perintah dengan Maple7 untuk menentukan integral fungsi f dengan batas bawah =a dan batas atas = b adalah :

```
> int(f, h, x=a..b);
```

Perintah untuk contoh1 :

```
> int(x/(x^3-1),x=2..4);
```

Perintah untuk contoh2 :

```
> int(x^2-x^3,x=0..1);
```

Perintah untuk contoh3 :

```
> int(x^4-x^6,x=0..1);
```

Pertemuan ke : 4

Penyusun : Dewi Rachmatin

Materi : Fungsi dan Grafik Fungsi Dua Peubah

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

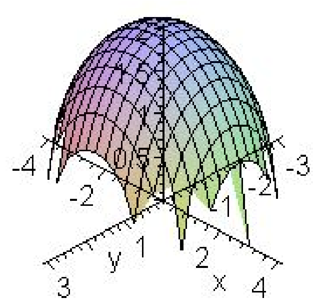
Fungsi dan grafik fungsi dua peubah telah dipelajari pada matakuliah Kalkulus, akan tetapi teknik penggambarannya tidaklah mudah. Dengan software Maple sketsa permukaan fungsi dua peubah dapat diperoleh cepat bahkan untuk fungsi dua peubah yang rumit sekalipun.

Berikut ini diberikan contoh permukaan fungsi dua peubah yang sederhana.

Contoh1 :

Gambarlah permukaan fungsi : f(x,y) = $\frac{1}{3}\sqrt{36-9x^2-4y^2}$.

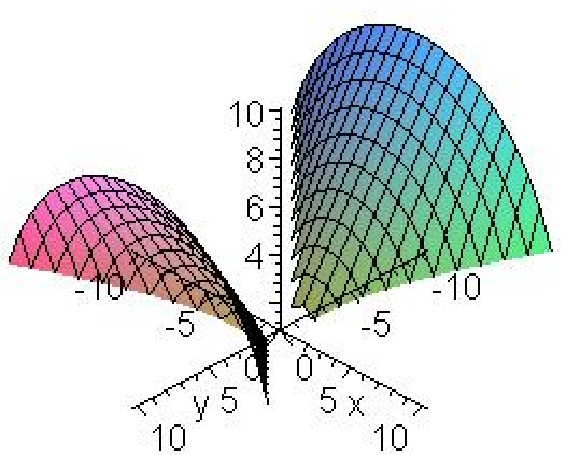
Sketsa permukaan fungsi f pada contoh1 :



Contoh2 :

Gambarlah permukaan fungsi : g(x,y) = $\sqrt{x^2 - y^2 - 1}$.

Sketsa permukaan fungsi g tersebut :

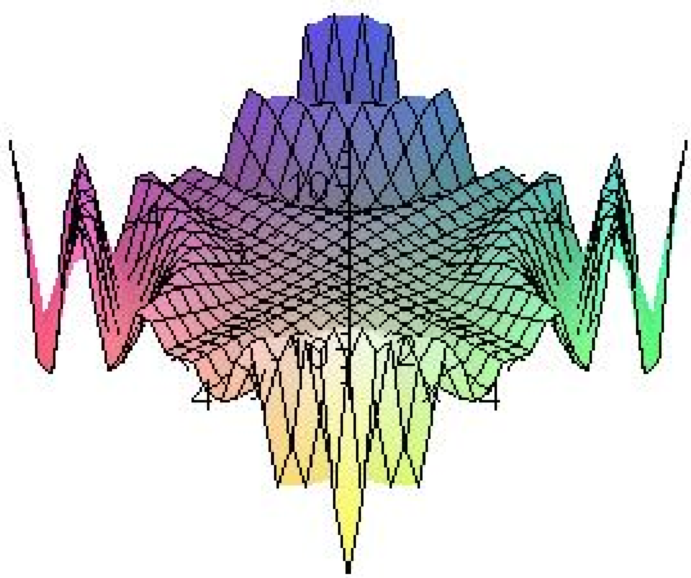


Berikut ini diberikan contoh permukaan fungsi dua peubah yang lebih rumit.

Contoh3 :

Gambarlah permukaan fungsi : h(x,y) = $xy\cos(xy)$.

Sketsa permukaan fungsi h tersebut :



Penulisan perintah dengan Maple7 untuk menggambar fungsi satu peubah

> plot3d(expr1, x=a..b, y=c..d)

> plot3d(f, a..b, c..d)

> plot3d([exprf,exprg,exprh], s=a..b, t=c..d)

> plot3d([f,g,h], a..b, c..d)

di mana f,g,h : fungsi-fungsi yang akan digambar

expr1 : persamaan fungsi dalam variabel x dan y exprf,exprg,exprh : persamaan fungsi dalam variabel s dan t

Perintah untuk contoh1 :

```
> plot3d(sqrt(36-9*x^2-4*y^2)/3,x=-3..3,y=-4..4,axes=normal);
```

Perintah untuk contoh2 :

```
> plot3d(sqrt(x^2-y^2-1),x=-10..10,y=-10..10,axes=normal);
```

Perintah untuk contoh3 :

```
> plot3d(x*y*cos(x*y),x=-4..4,y=-4..4,axes=normal);
```

Pertemuan ke : 5

Penyusun : Dewi Rachmatin

Materi : Limit dan Turunan Fungsi Dua Peubah

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Mahasiswa telah mempelajari limit dan turunan fungsi dua peubah ini dalam matakuliah Kalkulus. Sehingga diharapkan pada matakuliah ini mereka dapat mengingat kembali beberapa konsep yang penting pada fungsi dua peubah seperti limit dan turunan parsial. Berikut diuraikan definisi limit fungsi dua peubah.

Definisi

Untuk mengatakan bahwa $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ yang berpadanan sedemikian sehingga

$|f(x,y) - L| < \varepsilon$ dengan syarat bahwa $0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta.$

Berikut diuraikan definisi turunan parsial pertama fungsi dua peubah.

Definisi

Andaikan *f* suatu fungsi dua peubah *x* dan *y*. Turunan parsial fungsi *f* terhadap *x* adalah fungsi f_x yang nilainya di titik (*x*,*y*) sebarang dalam wilayah *f* adalah

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

asalkan limit ini ada. Turunan parsial fungsi *f* terhadap *y* adalah fungsi f_y yang nilainya di titik (*x*,*y*) sebarang dalam wilayah *f* adalah

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

asalkan limit ini ada (Purcell, 1987).

Perintah baku untuk menentukan limit fungsi dua peubah dengan Maple7 sebagai berikut :

limit(f, points)

limit(f, points, dir)

di mana

f - *an algebraic expression* (fungsi 2 peubah yang diberikan)

points - *a set of equations of the form* x=a (titik limit yang diujikan)

dir - *(optional) direction* (arah pendekatan limit kiri atau limit kanan).

Berikut perintah baku untuk menentukan turunan parsial fugsi dua peubah dengan Maple7.

diff(a, x1, x2, ..., xn)

Diff(a, x1, x2, ..., xn)

diff(a, [x1, x2, ..., xn])

Diff(a, [x1, x2, ..., xn])

a - *an algebraic expression* (fungsi dua peubah yang diberikan)

x1, x2, ..., xn - *names* (nama variabel-variabel fungsi dua peubah).

Berikut ini diberikan beberapa contoh penentuan limit dan turunan parsial fungsi dua peubah.

Contoh :

```
> limit((x^2-y^2)/(x^2+y^2), {x=0,y=0});
```

$$\mathit{undefined}$$

```
> limit(x+1/y, {x=0,y=infinity});
```

$$0$$

```
> limit(x*y, {x=0,y=infinity});
```

$$\mathit{undefined}$$

```
> diff(f(x,y),x);
```

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathrm{f}(x, y)$$

```
> diff(f(x,y),y);
```

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathrm{f}(x, y)$$

```
> diff(f(x,y),x,y);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} \mathrm{f}(x, y)$$

```
> diff(f(x,y),y,y);
```

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathrm{f}(x, y)$$

```
> f := exp(x*y);
```

$$f := \mathbf{e}^{(x\,y)}$$

> diff(f,x);

$$y\,\mathbf{e}^{(x\,y)}$$

> diff(f,y);

$$x\,\mathbf{e}^{(x\,y)}$$

> diff(f,x,y);

$$\mathbf{e}^{(x\,y)} + y\,x\,\mathbf{e}^{(x\,y)}$$

> diff(f,y,y);

$$x^2\,\mathbf{e}^{(x\,y)}$$

Pertemuan ke	:	6
Penyusun	:	Dewi Rachmatin
Materi	:	UTS (materi pertemuan 1 sampai 5)

Pertemuan ke : 7

Penyusun : Dewi Rachmatin

Materi : Vektor dan Operasi-Operasi Vektor

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Mahasiswa diharuskan sebelumnya telah mengambil matakuliah Aljabar Linear sehingga dapat menentukan hasil operasi-operasi vektor seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian dengan skalar, serta dapat menentukan hasil kali silang, hasil kali dalam dan panjang vektor. Sehingga hasil penghitungan secara manual dapat dibandingkan dengan hasil penghitungan secara analitis. Berikut beberapa operasi vektor yang telah dikenal :

Misalkan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ dan $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Maka :

$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$;

$k\,\mathbf{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$ di mana k adalah sebarang scalar ;

Panjang vektor $\mathbf{v}$: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$;

$\mathbf{u} \bullet \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos\theta$ dengan θ adalah sudut di antara $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$;

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$.

Berikut ini diberikan beberapa contoh penulisan vektor dan operasi-operasi pada vektor dengan Maple7.

```
> linalg[vector](4,[1,x,x^2,x^3]);
```

$$[1, x, x^2, x^3]$$

```
> array(1..3,[1,2,3]);
```

$$[1, 2, 3]$$

```
> Vector(1..3,5);
```

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

```
> Vector[row]([1,2,3]);
```

$$[1, 2, 3]$$

```
> with(linalg): V:=<1,2,3>;
```

$$V := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

```
> W := <2,1,1>;
```

$$\mathrm{W} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> dotprod(V ,W) ;
```

$$7$$

```
> crossprod(V,W);
```

$$[-1, 5, -3]$$

```
> norm(V,2);
```

$$\sqrt{14}$$

Pertemuan ke : 8

Penyusun : Dewi Rachmatin

Materi : Matriks dan Operasi-Operasi Matriks

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Mahasiswa diharuskan sebelumnya telah mengambil matakuliah Aljabar Linear sehingga dapat menentukan hasil operasi-operasi matriks seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, serta dapat menentukan determinan matriks, transpos matriks dan invers matriks (Anton, 1987). Sehingga hasil penghitungan secara manual dapat dibandingkan dengan hasil penghitungan secara analitis.

Berikut ini diberikan beberapa contoh penulisan matriks dan operasi-operasi pada matriks dengan Maple7.

```
> A := Matrix([[1,2,3],[4,5,6]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> B := Matrix([[1],[2],[1]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> A . B;
```

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

> multiply(A,B);

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 20 \end{bmatrix}$$

> C := Matrix([[0],[1],[0]]);

$$C := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> B - C ;

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> 5*A ;

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & 25 & 30 \end{bmatrix}$$

> E := Matrix([[2,1],[1,1]]);

$$E := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> transpose(A);

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

> F := array([[1,-1],[1,1]]);

$$F := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(F);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> det(F);
```

$$2$$

Pertemuan ke : 9

Penyusun : Dewi Rachmatin

Materi : Sistem Persamaan Linier, Nilai Eigen dan Vektor Eigen

URAIAN POKOK-POKOK PERKULIAHAN

Mahasiswa sebelumnya telah mempelajari eksistensi solusi SPL atau syarat ada tidaknya solusi suatu SPL n persamaan dengan n peubah, serta mengetahui syarat ketunggalan solusi suatu SPL. Sehingga hasil-hasil yang diperoleh secara manual dapat dibandingkan dengan hasil komputasi dengan bantuan software Maple7.

Berikut diulas kembali sebuah teorema ketunggalan solusi SPL :

Teorema

Jika A adalah matriks nxn yang dapat dibalik (*invertible*), maka untuk setiap matriks B yang berukuran nx1, sistem persamaan :

A X = B mempunyai persis satu Penyelesaian, yakni X = A^{-1} B. □

Perhatikan contoh berikut :

Contoh1 : Pecahkanlah sistem-sistem

(a) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Penyelesaian. Kedua sistem mempunyai matriks koefisien yang sama. Jika diperbesar matriks koefisien ini dengan kolom konstanta pada ruas kanan dari sistem-sistem ini, kemudian matriks ini direduksi terhadap bentuk eselon baris tereduksi akan dihasilkan :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & | & -1 \end{bmatrix} \text{(buktikan).}$$

Jadi solusi SPL (a) adalah : $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ dan solusi SPL (b) :

$x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Berikut ini diberikan sebuah contoh penentuan nilai eigen dan vektor eigen.

Contoh2 :

Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Penyelesaian. Persamaan karakteristik dari A adalah $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2 = 0$ (buktikan), sehingga nilai-nilai eigen dari A adalah $\lambda=1$ dan $\lambda=5$. Misalkan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen A yang bersesuaian dengan λ yang memenuhi persamaan :

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan memecahkan sistem ini, untuk $\lambda = 1$ diperoleh :

$x_1 = -s$, $x_2 = s$ dan $x_3 = t$ (buktikan).

Jadi vektor-vektor eigen A yang bersesuaian dengan $\lambda = 1$ adalah :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (buktikan).}$$

Untuk $\lambda = 5$ diperoleh vektor eigen : $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (buktikan).

Berikut ini diberikan contoh SPL dan solusinya ditentukan dengan Maple7.

```
> solve({x+2*y+3*z=4,2*x+5*y+3*z=5,x+8*z=9},{x,y,z});
```

$$\{ y = 0, z = 1, x = 1 \}$$

```
> solve({x+2*y+3*z=1,2*x+5*y+3*z=6,x+8*z=-1*6},{x,y,z});
```

$$\{ z = -1, y = 1, x = 2 \}$$

```
> with(linalg): A:=matrix(3,3,[3,-2,0,-2,3,0,0,0,5]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvals(A);
```

$$1, 5, 5$$

```
> eigenvects(A);
```

$$[1, 1, \{[1, 1, 0]\}], [5, 2, \{[0, 0, 1], [-1, 1, 0]\}]$$

Pertemuan ke	:	10
Penyusun	:	Dewi Rachmatin
Materi	:	UAS (Materi pertemuan 7 sampai 10)

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. (1987). *Aljabar linear Elementer*. Edisi Kelima. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin dan Dale Varberg. (1984). *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Jilid1. Edisi ke3. Jakarta : Penerbit Erlangga.

Waterloo Maple Inc. (2001). *Maple 7 Learning Guide*. Canada.