BEBERAPA DISTRIBUSI PELUANG KONTINU

Normal, Gamma, Eksponensial, Khi-Kuadrat, Student dan F

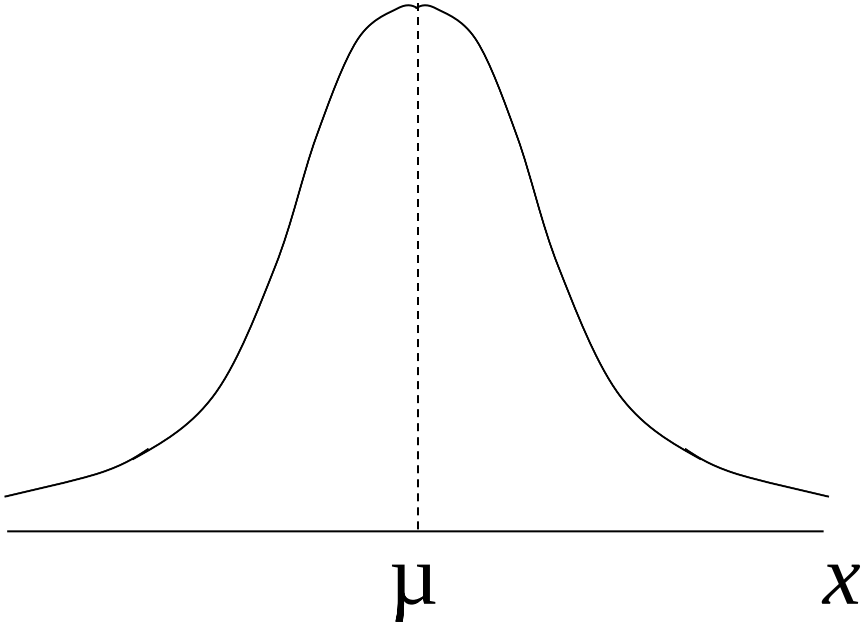
Distribusi Normal

- Distribusi yang terpenting dalam bidang statistika, penemu : DeMoivre (1733) dan Gauss
- Bergantung pada 2 parameter yaitu μ (rataan populasi) dan σ (simpangan baku populasi)
- Fungsi padat peubah acak normal X :

n(x; μ, σ) atau

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2}; -\infty < x < \infty$$

Kurva Normal



- Distribusi normal dengan μ=0 dan σ=1 disebut distribusi normal baku

Sifat-sifat Kurva Normal

1. Modus,terdapat pada $x = \mu$
2. Kurva setangkup terhadap rataan μ
3. Kurva mempunyai titik belok pada :

   $x = \mu \pm \sigma$, cekung ke bawah jika $\mu-\sigma<X<\mu+\sigma$ dan cekung ke atas untuk x yang lainnya
4. Kedua ujung kurva mendekati sb-X

   asimtot datar kurva normal
5. Seluruh luas di bawah kurva = 1

Luas di Bawah Kurva Normal

- Luas di bawah kurva di antara x=x_1 dan x=x_2 adalah

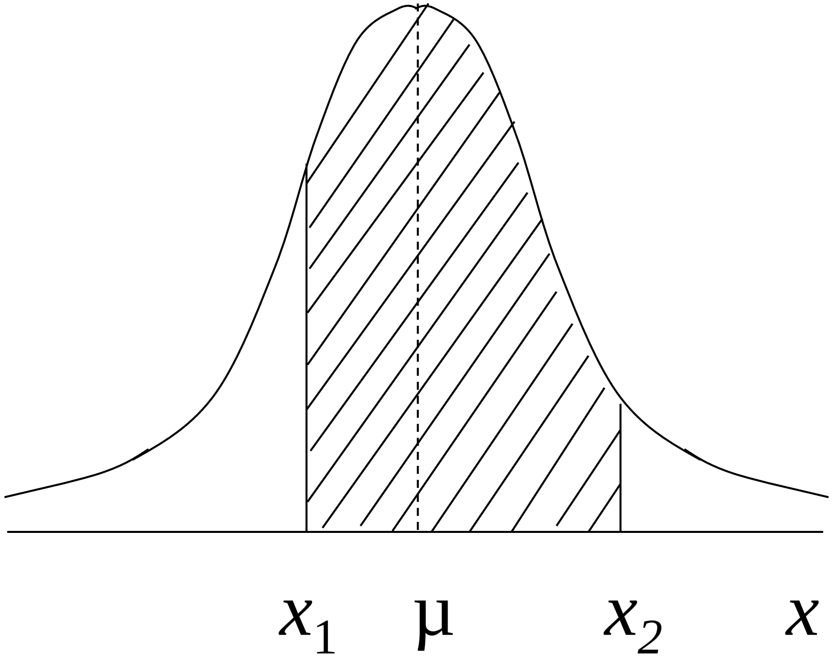
$$P\left(x_1 < X < x_2\right) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)[(x-\mu)/\sigma]^2} dx$$

- Peluang di satu titik = 0 untuk p.a.kontinu

$$P(X = a) = 0 \text{ sehingga}$$

$$P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2)$$

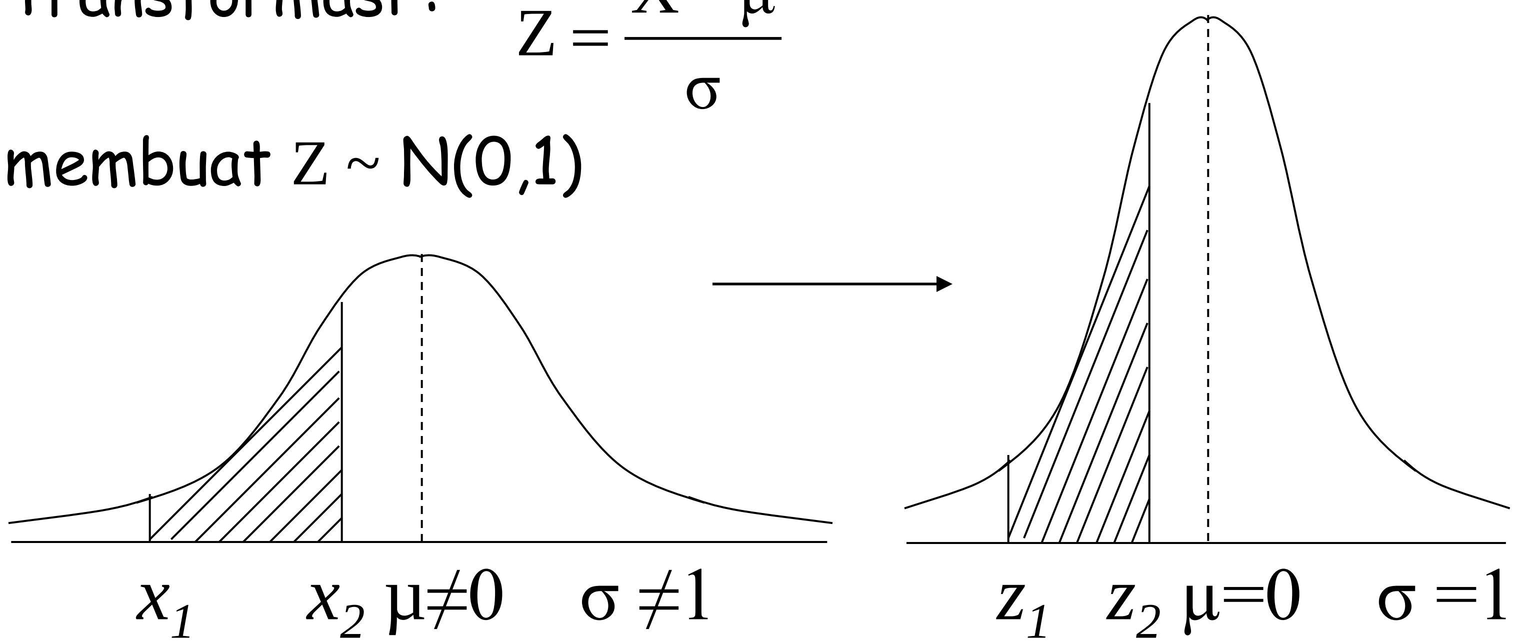
$$\text{Luas daerah yang diarsir} = P(x_1 \leq X \leq x_2)$$



Standardisasi atau Pembakuan

- Misalkan diberikan p.a. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Transformasi : $$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

membuat $Z \sim N(0,1)$



Contoh 1

- Diketahui X berdistribusi normal dengan μ=50 dan σ=10 tentukan peluang bahwa X mendapat harga antara 45 dan 62.
- Solusi :

$$P(45 < X < 62) = P\left(\frac{45-50}{10} < Z < \frac{62-50}{10}\right)$$

$$= P(-0,5 < Z < 1,2) = P(Z < 1,2) - P(Z < -0,5)$$

$$= 0,8849 - 0,3085 = 0,5764$$

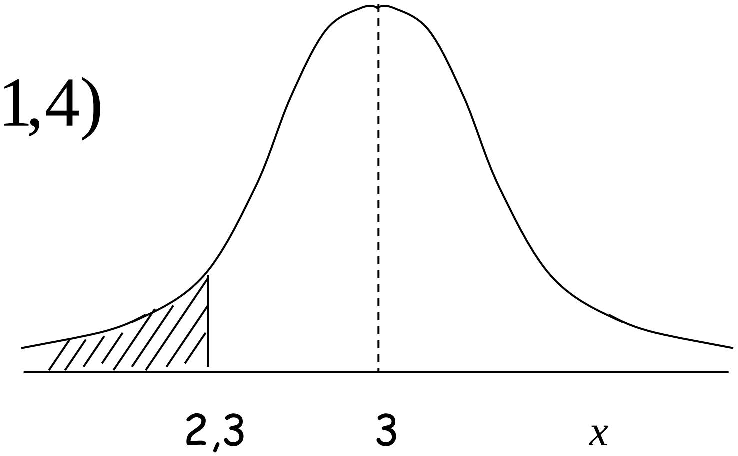
Contoh 2

- Suatu jenis baterai mobil rata-rata berumur 3 tahun dengan simpangan baku 0,5 tahun. Bila umur baterai berdistribusi normal, berapa persen baterai jenis A akan berumur kurang dari 2,3 tahun.
- Solusi : Misal X : umur baterai mobil jenis A

$$P(X < 2{,}3) = P(Z < -1{,}4)$$

$$= 0{,}0808$$

$$= 8{,}08\ \%$$



Contoh 3

- Suatu pengukur dipakai untuk menolak semua suku cadang yang ukurannya tidak memenuhi ketentuan 1,50±d. Diketahui pengukuran tsb berdistribusi normal dengan rataan 1,50 dan simpangan baku 0,2. Tentukan harga d agar ketentuan tsb 'mencakup' 95% seluruh pengukuran.
- Solusi : Diketahui luas atau peluang=0,95 tentukan dulu z kemudian cari x=σ z +μ

$$P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$$

$$1,50 + d = (0,2)(1,96) + 1,50$$

$$d = (0,2)(1,96) = 0,392$$

Dalil Limit Pusat

Misalkan X berdistribusi tertentu dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ . Jika ukuran sampel (n) cukup besar ($n \rightarrow \infty$), maka

$Z = (X - \mu)/\sigma$ berdistribusi normal baku N(0,1). "Bentuk limit distribusinya"

- Kasus khusus penerapan dalil limit pusat :

Teorema :

$$\bar{X} \sim (\mu, \sigma^2 / n) \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Distribusi Gamma

- Distribusi gamma mendapat namanya dari fungsi gamma yaitu

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx = (\alpha - 1)!\ ;\ \text{untuk } \alpha > 0$$

- Peubah acak kontinu X berdistribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\beta > 0$, pdfnya :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, x > 0 \\ 0\text{, untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- $\mu = \alpha.\beta$ dan $\sigma^2 = \alpha.\beta^2$

Distribusi Eksponensial

- Peubah acak kontinu X berdistribusi eksponensial dengan parameter β>0, pdfnya :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0, & \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- $\mu = \beta$ dan $\sigma^2 = \beta^2$

Distribusi Khi-Kuadrat (Chi-Square)

- Peubah acak kontinu X berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan (d.k.) ν, pdfnya :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2} & , x > 0 \\ 0 & , \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

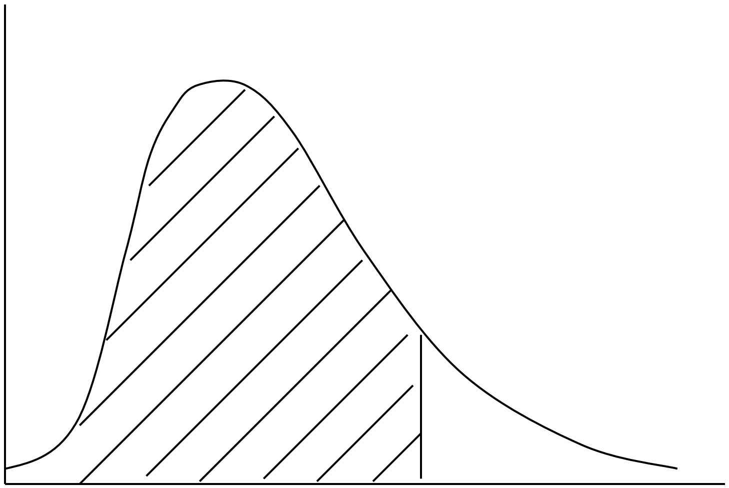
- $\mu = \nu$ dan $\sigma^2 = 2\nu$ dengan ν bil. bulat +;

  khi-kuadrat : gamma dengan $\alpha = \nu/2$ dan $\beta = 2$.

Sifat-sifat Kurva Khi-Kuadrat

1. Grafik kurva berada di kuadran I bid. kartesius
2. Kurva tidak simetri, miring ke kanan (kurva +). Kemiringannya makin berkurang jika d.k.nya makin besar
3. Ujung kurva sebelah kanan mendekati sb-X asimtot datarnya
4. Seluruh luas di bawah kurva = 1
5. …

Kurva Khi-Kuadrat



χ^2_p

- Luas daerah yang diarsir = p
- Titik kritis untuk p=0,95 dan ν = 14 adalah 23,7

Teorema

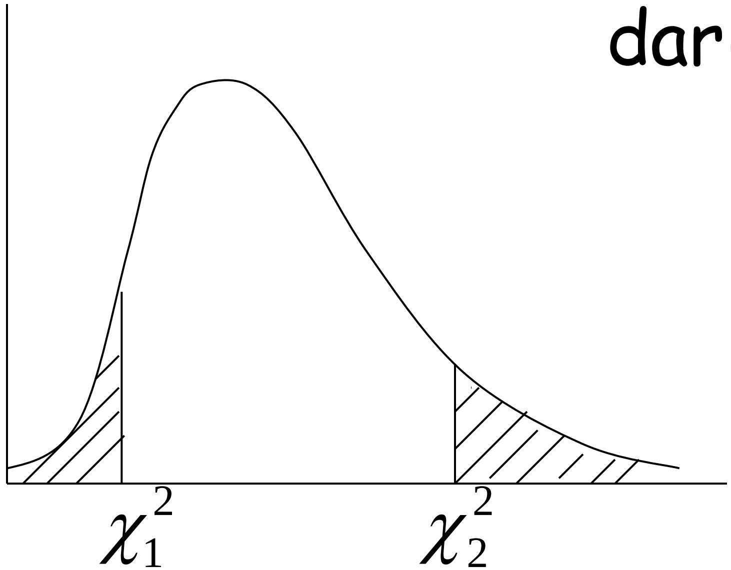
Jika S^2 variansi sampel acak ukuran n diambil dari populasi normal dengan variansi σ^2 , maka peubah acak :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2$$

berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan (dk) : ν = n-1.

Contoh1

- Tentukan titik kritis untuk dk=9, jika luas daerah seb. kanan = 0,05 dan luas daerah seb.kiri = 0,025 !



dari tabel khi-kuadrat :

χ_1^2 =2,70

χ_2^2 =16,9

Contoh2

Suatu pabrik baterai mobil menjamin bahwa baterainya akan tahan rata-rata 3 tahun dengan simpangan baku 1 tahun. Bila lima baterainya tahan 1,9;2,4;3,0;3,5;dan 4,2 tahun, apakah pembuatnya masih yakin bahwa simpangan baku baterai tsb 1 tahun?

Jawab : Mula-mula dihitung variansi sampel

$$s^2 = [5 \,.\, 48{,}26-(15)^2]/(5 \,.\, 4)=0{,}815.$$

Kemudian $\chi^2 = [4 \,.\, 0{,}815]/1=3{,}26$

merupakan suatu nilai khi-kuadrat dengan dk=4. Karena 95% nilai khi-kuadrat dengan dk=4 terletak antara 0,484 dan 11,143, nilai hitung σ^2=1 masih wajar, sehingga tidak ada alasan mencurigai simpangannya bukan 1 tahun

Distribusi Student (t)

- Jarang sekali variansi populasi diketahui
- Untuk sampel ukuran n $\geq$30 taksiran σ^2 yang baik diperoleh dengan menghitung nilai S^2 atau S_{n-1}^2 , selama itu distribusi statistik $(\bar{X}-\mu)/(S/\sqrt{n})$ masih secara hampiran berdistribusi normal baku, tapi bila n $<$ 30 kita menghadapi distribusi T

Distribusi Student (t)

- Pertama kali diterbitkan pada 1908 dalam suatu makalah oleh W.S. Gosset
- Karyanya diterbitkan secara rahasia dengan nama "Student"
- Dalam menurunkan persamaan ini Gosset menganggap sampel berasal dari normal. Kendati anggapan ini kelihatan amat mengekang dapat dibuktikan populasi yang tidak normal tapi distribusinya berbentuk lonceng masih memberikan nilai T yang menghampiri amat dekat distribusi t

Distribusi t dengan dk: ν=n-1

Misalkan $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ p.a. normal baku dan $V = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ p.a. khi-kuadrat dengan derajat kebebasan ν=n-1.

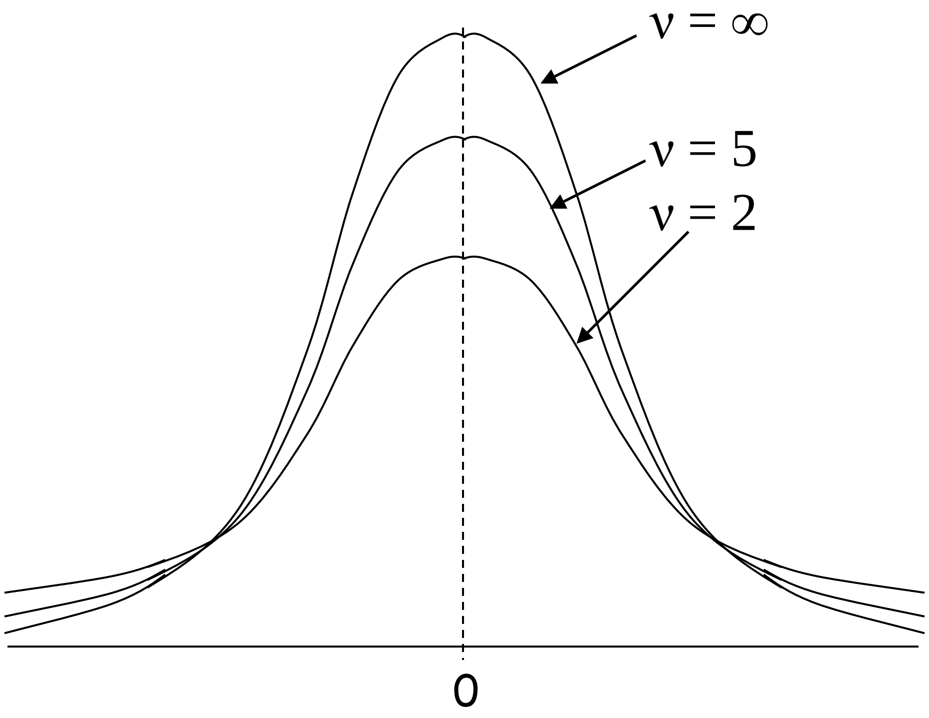
Jika Z dan V bebas, maka distribusi p.a. :

$$T = \frac{\left(\bar{X} - \mu\right) / \left(\sigma / \sqrt{n}\right)}{\sqrt{\left[(n-1)S^2 / \sigma^2\right] / (n-1)}}$$

diberikan oleh :

$$f(t) = \frac{\Gamma\left[\left(v+1\right)/2\right]}{\Gamma\left(v/2\right)\sqrt{\pi v}} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\left(v+1\right)/2} \quad ; -\infty < t < \infty$$

Hubungan kurva t dengan $\nu = 2$ dan 5 dan kurva Normal Baku $\nu = \infty$



Sifat-sifat Kurva t

1. Kurva setangkup terhadap rataan 0
2. Kurva berbentuk lonceng, tapi distribusi t lebih berbeda satu sama lain dengan distribusi Z karena nilai T tergantung pada dua besaran yang berubah-ubah yaitu $\overline{X}$ dan S^2 sedangkan nilai Z hanya tergantung pada perubahan $\overline{X}$
3. Kedua ujung kurva mendekati sb-X asimtot datarnya
4. Seluruh luas di bawah kurva = 1
5. …

Contoh

Suatu pabrik bola lampu yakin bahwa bola lampunya akan tahan menyala rata-rata selama 500 jam. Untuk mempertahankan nilai tsb, tiap bulan diuji 25 bola lampu.

Bila nilai t yang dihitung terletak antara $-t_{0,05}$ dan $t_{0,05}$ maka pengusaha pabrik akan mempertahankan keyakinannya. Kesimpulan apakah yang seharusnya dia ambil dari sampel dengan rataan 518 jam dan simpangan baku sampel 40 jam?

Anggap bahwa distribusi waktu menyala secara hampiran adalah normal.

Dari tabel diperoleh $t_{0,05} = 1{,}711$ untuk dk=24. Jadi pengusaha tadi akan puas dengan keyakinannya bila sampel 25 bola lampu akan memberikan nilai t antara - 1,711 dan 1,711. Bila memang μ=500, maka

$$t = \frac{518 - 500}{40/\sqrt{25}} = 2{,}25$$

suatu nilai yang cukup jauh di atas 1,711. Peluang mendapat nilai t dengan dk=24 sama atau lebih besar dari 2,25 secara hampiran adalah 0,02.

Bila $\mu > 500$, nilai t yang dihitung dari sampel akan lebih wajar. Jadi pengusaha tadi kemungkinan besar akan menyimpulkan produksinya lebih baik dari pada dugaannya semula.

Distribusi F

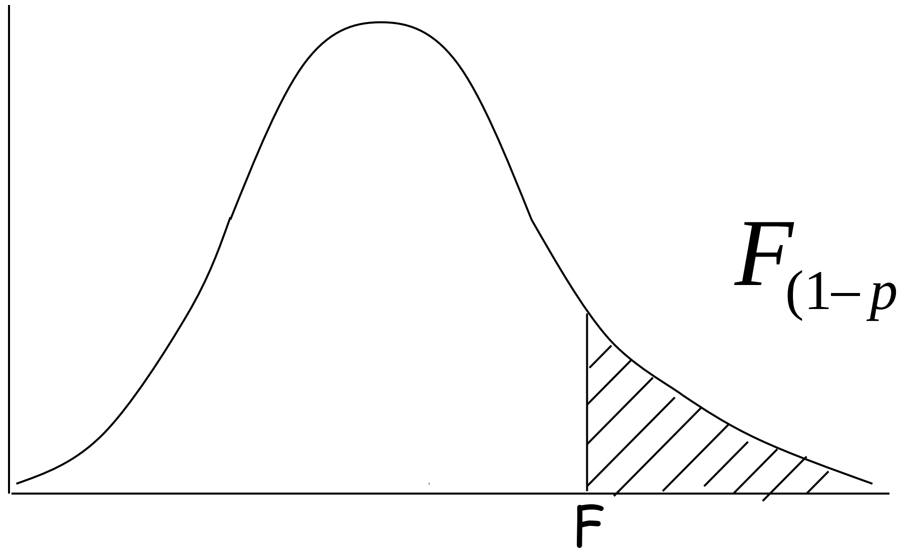
T : Misalkan U dan V dua peubah acak bebas masing-masing berdistribusi khi-kuadrat dengan dk1= v_1 dan dk2= v_2 . Maka distri-busi p.a :

$$X = \frac{U/v_1}{V/v_2} \sim F$$

dengan dk1= v_1 dan dk2= v_2

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left[\left(v_1+v_2\right)/2\right].\left(v_1/v_2\right)^{v_1/2}}{\Gamma\left(v_1/2\right)\Gamma\left(v_2/2\right)} \cdot \dfrac{x^{\frac{v_1}{2}-1}}{\left(1+v_1x/v_2\right)^{\left(v_1+v_2\right)/2}} ; 0 < x < \infty \\ 0 \ , \quad \text{untuk } x \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

Kurva F



$$F_{(1-p);(\nu_2,\nu_1)} = \frac{1}{F_{p;(\nu_1,\nu_2)}}$$

- Ada dua dk yaitu dk1= ν_1 dan dk2= ν_2
- Untuk p=0,05 dengan (ν_1,ν_2)=(24,8) : F=3,12

  untuk p=0,01 dengan (ν_1,ν_2)=(24,8) : F=5,28

Sifat-sifat Kurva F

1. Grafik kurva berada di kuadran I bid. kartesius
2. Kurva tidak simetri, miring ke kanan (kurva +)
3. Ujung kurva sebelah kanan mendekati sb-X asimtot datarnya
4. Seluruh luas di bawah kurva = 1
5. …

- Sampling