PENGANTAR
ANALISIS FUNGSIONAL

SUMANANG MUHTAR GOZALI

KBK ANALISIS

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

BANDUNG

2010

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji bagi Allah Rabb semesta alam. Shalawat serta salam bagi Rasulullah Muhammad *shallallahu alaihi wasallam*. Tulisan ini merupakan hasil rangkuman materi kuliah Analisis Fungsional yang pernah diampu oleh Penulis. Uraian dibuat sesederhana mungkin yang diharapkan dapat dipahami dengan mudah oleh pengguna tulisan ini. Terakhir, Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat, khususnya bagi para pembaca yang berminat dalam bidang matematika analisis.

Bandung, Februari 2010

Penulis,

Sumanang Muhtar Gozali

DAFTAR ISI

BAB 1

Ruang Metrik

Pada kuliah Analisis Real kita mempelajari sistem bilangan real serta berbagai hal terkait. Hampir keseluruhan topik yang kita pelajari tidak terlepas dari gagasan nilai mutlak. Kita melihat konsep nilai mutlak memegang peranan penting dalam merumuskan konsep-konsep lainnya seperti limit dan kekontinuan.

Pada bab ini kita akan melihat fungsi yang lebih umum dari pada nilai mutlak yaitu apa yang disebut metrik. Metrik ini selalu bisa kita rumuskan pada sebarang himpunan. Dengan cara serupa kita pun akan menggunakan metrik ini untuk merumuskan konsep-konsep lain sebagaimana yang telah kita ketahui di sistem bilangan real.

1.1 Metrik

Definisi. *Ruang metrik* adalah suatu himpunan X yang disertai fungsi $\rho : X \times X \to \mathbf{R}$ (disebut *metrik* di X), sehingga untuk semua $x, y, z \in X$ berlaku:

M1. $\rho(x, y) \geq 0$ with $\rho(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$. (**Positive Definite**)

M2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (**Symmetric**)

M3. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (**Triangle Inequality**)

Secara eksplisit kita sering menyatakan ruang ini sebagai (X, ρ) .

Contoh. Perhatikan himpunan bilangan real $\mathbf{R}$ yang dilengkapi dengan fungsi

$$\rho(x,y) = |x-y|.$$

Dengan menggunakan sifat-sifat fungsi nilai mutlak dapat dibuktikan bahwa ρ suatu metrik di $\mathbf{R}$.

Contoh. Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Untuk sebarang $x, y \in X$ kita mendefinisikan

$$\rho(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y. \end{array} \right\}$$

Dapat diperiksa bahwa ρ suatu metrik di X, dan ρ ini disebut metrik diskrit.

Contoh. Perhatikan himpunan $\mathbf{R}^n = \{(x_1, ..., x_n)\}$ yang disertai dengan

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kita akan membuktikan bahwa ρ suatu metrik. Dua sifat pertama mudah untuk dibuktikan. Oleh karena itu kita akan langsung pada pembuktian sifat ketaksamaan segitiga.

Bukti. Misalkan $a = (a_1, ..., a_n), b = (b_1, ..., b_n) \in \mathbf{R}^n$. Perhatikan fungsi

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} (a_i u + b_i)^2, \quad u \in \mathbf{R}.$$

Kita mempunyai

$$\psi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 u^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i u + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Karena $\psi(u) \geq 0$, maka kita mendapatkan $(2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 - 4\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq 0$. Ini mengakibatkan berlakunya ketaksamaan berikut (Cauchy-Schwarz Inequality)

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \ \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Sementara itu, berdasarkan ketaksamaan ini kita memperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq |\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Akhirnya, kita memperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

Ketaksamaan ini ekuivalen dengan

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2,$$

or

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}.$$

Jika kita menuliskan $a_i = x_i - z_i,\ b_i = z_i - y_i$ pada bentuk terakhir ini maka kita mendapatkan apa yang kita inginkan.

Contoh. Misalkan $\mathcal{C}[a,b]$ menyatakan himpunan semua fungsi kontinu $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ dan

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Maka $\rho(f,g) = \|f-g\|$ menyatakan suatu metrik di $\mathcal{C}[a,b]$. (**Buktikan!**)

Misalkan (X,ρ) suatu ruang metrik dan $Y \subset X$. Jika kita membatasi ρ pada $Y \times Y$ maka kita dapat menganggapnya sebagai metrik baru $\tilde{\rho}$ di Y, yaitu $\tilde{\rho} = \rho|_{Y\times Y}$. Dalam hal ini, kita menyebut $(Y,\tilde{\rho})$ sebagai subruang dari (X,ρ).

Soal: Buktikan

Untuk sebarang $x_1, ..., x_n$ di ruang metrik (X,ρ) berlaku

$$\rho(x_1,x_n) \leq \rho(x_1,x_2) + \rho(x_2,x_3) + ... + \rho(x_{n-1},x_n).$$

1.2 Himpunan Buka, Himpunan Tutup

Kita telah mengenal konsep interval buka maupun interval tutup di garis bilangan real. Kita akan memperumum konsep ini di ruang metrik dengan sebutan bola buka dan bola tutup.

Definisi. Misalkan $a \in X$ and $r > 0$. *Bola buka* dengan *pusat* a dan *jari-jari* r adalah himpunan

$$B_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) < r\}.$$

Serupa dengan ini, *bola tutup* dengan *pusat* a dan *jari-jari* r adalah himpunan

$$\overline{B_r(a)} = \{x \in X : \rho(x,a) \leq r\}.$$

Selanjutnya, sifat buka dan tutup ini kita terapkan pula untuk sebarang himpunan di ruang metrik.

Definisi.

i. Suatu himpunan $V \subset X$ disebut *buka* jika untuk setiap $x \in V$ terdapat $r > 0$ sehingga bola buka $B_r(x)$ termuat di V.

ii. Suatu himpunan $E \subset X$ dikatakan *tutup* jika $E^c = X \setminus E$ adalah buka.

Suatu bola buka $B(a,r)$ sering disebut *lingkungan-r* dari a. Adapun *lingkungan* dari a adalah sebarang subhimpunan yang memuat $B(a,r)$. Berdasarkan definisi, a merupakan suatu elemen di sebarang lingkungannya.

Titik $x_0 \in M \subset X$ disebut *titik dalam* dari M jika M merupakan suatu lingkungan dari x_0. Himpunan semua titik dalam dari M disebut *interior* dari M. Lebih lanjut, dapat diperiksa bahwa interior M suatu himpunan buka terbesar yang dimuat oleh M.

Sekarang, misalkan (X,ρ) suatu ruang metrik dan $\mathfrak{T}$ menyatakan semua subhimpunan buka dari X. Dapat diperiksa bahwa semua sifat berikut dipenuhi

1. $\emptyset \in \mathfrak{T}$, dan $X \in \mathfrak{T}$

2. Gabungan dari elemen-elemen di $\mathfrak{T}$ juga suatu elemen di $\mathfrak{T}$.

3. Irisan berhingga dari elemen-elemen di $\mathfrak{T}$ juga suatu elemen di $\mathfrak{T}$.

Selanjutnya, $\mathfrak{T}$ disebut topologi untuk X, dan $(X,\mathfrak{T})$ disebut ruang bertopologi.

Sekarang, perhatikan himpunan $M \subset X$. Titik $x_0 \in X$ dikatakan *titik limit* dari M jika untuk setiap lingkungan N dari x_0 memuat suatu elemen di M, yang berbeda dari x_0. Selanjutnya, gabungan dari M dan semua titik limitnya membentuk closure dari M, dinotasikan $\bar{M}$. Himpunan $\bar{M}$ ini merupakan himpunan tutup terkecil yang memuat M.

Definisi Suatu subhimpunan $M \subset X$ dikatakan *padat* di X, jika $\bar{M} = X$. Himpunan X dikatakan *separable* jika mempunyai subhimpunan terbilang yang padat.

Contoh

1. $\mathbb{R}$ adalah separable karena $\mathbb{Q}$ padat di $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{C}$ adalah separable karena
$$Q^* = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{Q}\},$$
padat di $\mathbb{C}$.
3. Ruang metrik diskrit X adalah separable jika dan hanya jika X terbilang.
4. Ruang ℓ^p dengan $1 \leq p < \infty$ adalah separable.

Soal: Buktikan

1. Setiap bola buka adalah himpunan buka dan setiap bola tutup adalah himpunan tutup.
2. Jika $a \in X$, maka $X \setminus \{a\}$ buka, dan $\{a\}$ tutup.
3. Di sebarang ruang metrik, himpunan kosong $\emptyset$ dan himpunan keseluruhan X keduanya adalah buka dan tutup.
4. Di ruang diskrit $\mathbf{R}$, setiap himpunan adalah buka dan tutup.

1.3 Barisan dan Kekonvergenan

1.4 Limit Fungsi

Pada bagian ini kita akan membahas konsep limit fungsi di ruang metrik.

Definisi Misalkan (X, ρ) dan (Y, τ) masing-masing adalah ruang metrik, dan a suatu titik limit dari (X, ρ). Perhatikan fungsi $f : X \to Y$. $f(x)$ dikatakan konvergen ke L untuk x menuju a, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$0 < \rho(x, a) < \delta \quad \text{berimplikasi} \quad \tau(f(x), L) < \varepsilon.$$

Dalam hal ini kita menuliskan

$$\lim_{x \to a} f(x) = L,$$

dan L disebut *limit* dari $f(x)$ untuk x menuju a.

Kita telah melihat bahwa konsep limit fungsi di ruang metrik adalah serupa dengan apa yang kita ketahui di bilangan real. Kita tidak bisa langsung memperoleh sifat-sifat kelinieran serta yang lainnya karena situasinya jelas berbeda. Namun demikian, jika kita mengasumsikan $Y = \mathbf{R}$ tentu kita dapat memperoleh beberapa sifat limit yang serupa.

Sekarang kita langsung menuju kekontinuan fungsi di ruang metrik.

Definisi Misalkan (X, ρ) dan (Y, τ) masing-masing adalah ruang metrik, dan a suatu elemen di (X, ρ). Perhatikan fungsi $f : X \to Y$. $f(x)$ dikatakan *kontinu* di a, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga

$$\rho(x, a) < \delta \quad \text{berimplikasi} \quad \tau(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Dalam hal ini jika f *kontinu* di setiap $a \in X$ maka f dikatakan kontinu.

Kita menutup bagian ini dengan dua teorema berkaitan dengan kekontinuan fungsi di ruang metrik.

Teorema. Perhatikan fungsi $f : X \to Y$ dengan $a \in X$. Fungsi f kontinu di a jika dan hanya jika berlaku bahwa untuk setiap barisan x_n di X yang konvergen ke a berimplikasi $f(x_n)$ konvergen ke $f(a)$.

Sementara itu kita juga mempunyai karakteristik lain dari fungsi kontinu berkaitan dengan sifat prapeta dari himpunan buka.

Teorema Pemetaan $f : X \to Y$ kontinu jika dan hanya jika untuk setiap subhimpunan buka $M \subset Y$, $f^{-1}(M)$ buka di X.

BAB 2

Ruang Banach

Pada kuliah analiasis real Anda telah mempelajari beberapa sifat dasar sistem bilangan real. Selain itu, Anda juga telah diperkenalkan dengan konsep barisan, limit, serta topologi di sana. Kekonvergenan suatu barisan didefinisikan dengan melibatkan nilai mutlak. Demikian pula dengan limit, kekontinuan, himpunan buka, semuanya terkait dengan nilai mutlak di bilangan real. Satu hasil penting di bilangan real adalah bahwa setiap barisan Cauchy adalah konvergen, yaitu bahwa bilangan real bersifat lengkap. Pada kuliah ini kita akan mempelajari ruang vektor yang lengkap terhadap norm yang didefinisikan.

2.1 Ruang Vektor

Pada kuliah aljabar linear Anda telah mempelajari konsep ruang vektor. Berbagai contoh ruang vektor telah Anda pelajari, khususnya ruang berdimensi hingga. Pada bagian ini kita akan mereviu konsep ruang vektor serta melihat beberapa contoh yang akan sering kita bicarakan pada kuliah ini.

Ruang vektor V adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan dua buah operasi, yaitu penjumlahan vektor dan perkalian dengan skalar real. Terhadap kedua operasi ini, V memenuhi semua sifat berikut:

i. $(V, +)$ merupakan grup komutatif

ii. $(V, .)$ memenuhi

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$$

$$\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$$

$$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$$

$$1.u = u$$

Contoh

1. Perhatikan ruang Euclid

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

yang dilengkapi dengan dua operasi

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, ..., x_n) = (\alpha x_1, ..., \alpha x_n)$$

2. Perhatikan ruang fungsi

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ kontinu}\}$$

dengan dilengkapi dua operasi

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = (\alpha f(x)$$

3. Pandang ruang barisan terbatas

$$\ell^\infty = \{(x_i) : |x_i| \leq c_x,\ c_x \in \mathbb{R}\}$$

dengan dilengkapi dua operasi

$$(x_i) + (y_i) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$$

$$\alpha(x_i) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ...)$$

4. Misalkan $1 \leq p < \infty$. Pandang ruang barisan

$$\ell^p = \{(x_i) : \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty\}$$

dengan dilengkapi dua operasi

$$(x_i) + (y_i) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ...)$$

$$\alpha(x_i) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ...)$$

Misalkan X suatu ruang vektor dan $\emptyset \neq Y \subset X$. Himpunan Y disebut *subruang* dari X jika untuk semua skalar α, β dan $y_1, y_2 \in Y$ berlaku

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y.$$

Jelas bahwa untuk sebarang ruang vektor X, $Y = X$ dan $\{0\}$ keduanya juga merupakan subruang dari X.

Kombinasi linier dari vektor-vektor $x_1, x_2, ..., x_n$ di X adalah ekspresi

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n,$$

dengan $\alpha_i,\ i = 1, 2, ..., n$ merupakan skalar.

Untuk sebarang himpunan tak kosong $M \subset X$, himpunan semua kombinasi linier dari vektor-vektor di M membentuk subruang. Subruang ini dikatakan dibangun oleh M, dinotasikan span$M$.

Definisi Himpunan $x_1, x_2, ..., x_r$ di X dikatakan *bebas linier* jika

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_r x_r = 0$$

hanya dipenuhi oleh $\alpha_i = 0$ untuk semua i. Sementara itu, himpunan tak berhingga vektor-vektor $x_1, x_2, ...$ dikatakan bebas linier jika untuk setiap k, himpunan $x_1, x_2, ..., x_k$ bebas linier. Adapun himpunan yang tidak bebas linier disebut *bergantung linier*.

Suatu himpunan $B \subset X$ disebut basis untuk X jika B bebas linier dan membangun X. Jika banyaknya vektor di B berhingga maka dikatakan bahwa X berdimensi hingga, jika tidak maka X berdimensi tak hingga. Jika B adalah basis untuk X maka setiap elemen di X mempunyai representasi tunggal sebagai kombinasi linier dari vektor-vektor di B.

Misalkan X suatu ruang vektor dan Y adalah subruang dari X. Untuk setiap $x \in X$, definisikan koset

$$[x] = x + Y = \{x + y \ : \ y \in Y\}.$$

Selanjutnya, himpunan semua koset

$$X \backslash Y = \{[x] \ : \ x \in X\}$$

kita sebut ruang kuosien.

Di ruang kuosien $X \backslash Y$ kita dapat mendefinisikan

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{dan} \quad \alpha[x] = [\alpha x].$$

Terhadap dua operasi ini, $X \backslash Y$ membentuk ruang vektor, dan dimensi $X \backslash Y$ kita sebut ko-dimensi dari Y.

2.2 Ruang Norm

Di ruang vektor kita mengenal konsep panjang dari suatu vektor atau disebut norm vektor. Norm adalah fungsi $\|.\| : V \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

N1. $\|u\| \geq 0$; $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

N2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.

N3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ untuk semua $u, v \in X, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dengan mudah kita bisa melihat bahwa norm $\|.\|$ dapat menginduksi metrik

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Selanjutnya pasangan $(V, \|.\|)$ disebut ruang norm.

Contoh

1. Untuk setiap $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, definisikan

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Fungsi $\|.\|_2$ ini mendefinsikan suatu norm di $\mathbb{R}^n$.

2. Untuk setiap $x = x(t) \in C[a, b]$, definisikan

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

3. Untuk setiap $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^\infty$, definisikan

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1,2,...} |x_i|$$

4. Misalkan $1 \leq p < \infty$. Untuk setiap $x = (x_1, x_2, ...) \in \ell^p$, definisikan

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

BUKTI. **Lema** Suatu metrik yang diinduksi dari norm memenuhi

$$d(x+a, y+a) = d(x,y) \quad \text{dan} \quad d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y),$$

untuk semua $x, y, a \in X$ dan skalar α.

2.3 Kekonvergenan dan Kelengkapan

Teorema Suatu subruang Y dari ruang Banach X adalah lengkap jika dan hanya jika Y bersifat tutup di X.

Definisi Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm. Suatu barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika memenuhi

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Barisan (x_n) yang konvergen ke x kita notasikan dengan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$ atau $(x_n) \to x$, dan x kita sebut sebagai limitnya.

2.4 Himpunan Buka dan Himpunan Tutup

Definisi Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm dan $u \in X$. Lingkungan-ε dari u didefinisikan sebagai himpunan

$$V_\varepsilon(u) = \{x \in X : \|x - u\| < \varepsilon\}.$$

Definisi Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm dan $A \subset X$. Subhimpunan A dikatakan buka jika untuk setiap $u \in A$ terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $V_\varepsilon(u) \subset A$.
Subhimpunan $A \subset X$ dikatakan tutup jika $X \setminus A$ buka.

Teorema 2.4.1 *Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm dan $A \subset X$. Maka pernyataan berikut ekuivalen:*

a. A tutup

b. Jika (x_n) suatu barisan di A dan $(x_n) \to x$ maka $x \in A$.

BUKTI. $(a \Rightarrow b)$ Misalkan (x_n) barisan di A dan $(x_n) \to x$, tetapi $x \notin A$. Artinya, $x \in X \backslash A$ sehingga terdapat $\varepsilon > 0$ yang memenuhi $V_\varepsilon(x) \subset X \backslash A$. Karena $\|x_n - x\| \to 0$ maka terdapat m sehingga $\|x_m - x\| < \varepsilon$. Ini kontradiksi dengan asumsi bahwa (x_n) suatu barisan di A.

$(a \Leftarrow b)$ Andaikan A tidak tutup, maka $X \setminus A$ tidak buka. Artinya terdapat elemen $u \in X \setminus A$ sehingga $V_\varepsilon(u) \nsubseteq X \setminus A$, untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan mengambil $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, ...$ maka kita memperoleh barisan (u_n) sehingga

$$u_n \in V_{\frac{1}{n}}(u) \qquad \text{dan} \qquad u_n \in A, \ \forall\, n.$$

Oleh karena itu kita peroleh

$$\|u_n - u\| \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

Berdasarkan (b), haruslah $u \in A$, kontradiksi dengan $u \in X \setminus A$.

2.5 Ruang Norm Berdimensi Hingga

Definisi Misalkan X suatu ruang norm, dan $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ masing-masing adalah norm di X. Dua norm ini dikatakan *ekuivalen* jika terdapat bilangan positif a sehingga berlaku

$$a^{-1}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq a\|x\|_1, \qquad x \in X.$$

Proposisi Misalkan $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ keduanya adalah norm yang ekuivalen di X. Barisan (x_n) di X konvergen terhadap norm $\|.\|_1$ *jika dan hanya jika* (x_n) juga konvergen terhadap norm $\|.\|_2$.

Teorema 2.5.1 *Di ruang norm berdimensi hingga semua norm adalah ekuivalen.*

BUKTI.

2.6 Operator Linear

Pada kuliah kalkulus Anda mengenal fungsi di bilangan real. Di sini pun kita akan mempelajari fungsi di ruang norm yang kita sebut sebagai operator. Pada bagian ini kita memokuskan pada operator linear.

Definisi Misalkan X dan Y keduanya adalah ruang vektor. Operator linear $T : X \to Y$ adalah fungsi yang memenuhi

$$T(a+b) = Ta + Tb, \qquad \forall\, a, b \in X$$

$$T(\alpha a) = \alpha Ta, \qquad \forall\, a \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sebagaimana telah Anda kenal di aljabar linear, Jika $T : X \to Y$ suatu operator linear, kita mendefinisikan peta $R(T)$ dan ruang nol (Kernel) $N(T)$ sebagai

$$R(T) = \{y \in Y : y = Tx,\ x \in X\}$$

$$N(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$$

Sifat-sifat dasar yang menyangkut dua subhimpunan ini diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 2.6.1 *Misalkan $T : X \to Y$ linear, maka berlaku:*

1. *$R(T) \subset Y$ adalah suatu subruang*
2. *Jika $\dim X = n < \infty$ maka $\dim R(T) \leq n$*
3. *$N(T) \subset Y$ adalah suatu subruang*

BUKTI

Suatu operator $T : X \to Y$ dikatakan injektif (satu-satu) jika berlaku dua buah elemen berbeda dipetakan ke dua elemen yang berbeda pula. Dalam ungkapan lain,

$$Tx_1 = Tx_2 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = x_2.$$

Sekarang definisikan,

$$T^{-1} : R(T) \to X$$

$$y \mapsto x$$

dimana $Tx = y$. Dari definisi ini, jelas bahwa

$$T^{-1}T(x) = x \qquad \text{untuk semua } x \in X$$

$$TT^{-1}(y) = y \qquad \text{untuk semua } y \in R(T).$$

Teorema 2.6.2 *Misalkan $T : X \to Y$ linear, maka berlaku:*

1. *Invers $T^{-1} : R(T) \to X$ ada jika dan hanya jika $Tx = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$*
2. *Jika T^{-1} ada ia suatu operator linear juga*
3. *Jika $\dim(X) = n < \infty$ dan T^{-1} ada maka $\dim(R(T)) = \dim(X)$*

BUKTI

Operator Linear Terbatas

2.7 Ruang Dual

Definisi Misalkan X suatu ruang norm. Pemetaan f dari X ke $\mathbb{R}$ disebut fungsional linier jika

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Jika terdapat $C > 0$ sehingga $|f(x)| \leq C\|x\|$, untuk setiap x maka f dikatakan terbatas.

Selanjutnya, himpunan semua fungsional linier terbatas $f : X \to \mathbb{R}$ disebut ruang dual dari X, dinotasikan X'. Himpunan X' ini membentuk ruang norm terhadap

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

Perhatikan bahwa kita dapat menuliskan

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} |f(\frac{x}{\|x\|})| = \sup_{\|y\|=1} |f(y)|.$$

Lebih lanjut, kita mempunyai lema berikut.

Lema

Teorema 2.7.1 *Dual dari ℓ^p adalah ℓ^q, dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Bukti. Basis Schauder untuk ℓ^p adalah (e_k) dengan $e_k = (\delta_{kj})$. Oleh karena itu setiap $x \in \ell^p$ mempunyai representasi tunggal

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Sekarang pandang sebarang $f \in (\ell^p)'$. Karena f linier dan terbatas maka

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \gamma_k \qquad \gamma_k = f(e_k).$$

Misalkan q adalah konjugate dari p, selanjutnya perhatikan $x_n = (\alpha_k^{(n)})$ dengan

$$\alpha_k^{(n)} = \begin{cases} |\gamma_k|^q/\gamma_k & , k \leq n \text{ dan } \gamma_k \neq 0 \\ 0 & , \text{jika } k > n \text{ atau } \gamma_k = 0 \end{cases}$$

Dari sini kita peroleh

$$f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n)} \gamma_k = \sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q.$$

Oleh karena itu kita mempunyai

$$\begin{aligned} f(x_n) \leq \|f\|\|x_n\| &= \|f\| \left(\sum |\alpha_k^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

dengan penjumlahan dari 1 sampai n. Berdasarkan dua hubungan terakhir, kita mempunyai

$$f(x_n) = \sum |\gamma_k|^q \leq \|f\| \left(\sum |\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{p}},$$

sehingga

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|.$$

Karena n sebarang dan mengambil limit $n \to \infty$ maka kita peroleh

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|,$$

sehingga kita dapatkan fakta $(\gamma_k) \in \ell^q$.

Sebaliknya, misalkan $b = (\beta_k) \in \ell^q$ sebarang. Perhatikan fungsional g di ℓ^p dengan

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \beta_k, \qquad x = (x_k) \in \ell^p.$$

Jelas bahwa g linier dan berdasarkan ketaksamaan Holder, g terbatas, sehingga kita dapatkan $g \in (\ell^p)'$. Sampai sini kita telah membuktikan bahwa $f \mapsto (\gamma_k)$ suatu pengaitan dari $(\ell^p)'$ ke ℓ^q yang bersifat onto.

Selanjutnya, dengan mengacu pada ketaksamaan Holder kita mempunyai

$$|f(x)| = |\sum x_k \gamma_k| \leq \|x\| \left(\sum |\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dengan mengambil supremum atas semua x dengan norm 1, kita dapatkan

$$\|f\| \leq \left(\sum |\gamma_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dengan demikian kita telah membuktikan pengaitan $f \mapsto (\gamma_k)$ bersifat isometris. Oleh karena itu kita simpulkan, $(\ell^p)' = \ell^q$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Kreyszig, Erwin. (1978), *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons. Inc.

[2] Wade, W.R. (2000), *An Introduction to Analysis*, Prentice Hall.

[3] Zeidler, Eberhard (1995), *Applied Functional Analysis*, Springer-Verlag New York, Inc.

[4] Cohen, G.L. (2003), *A Course in Modern Analysis and Its Applications*, Cambridge University Press.

[5] Ma, Tsoy-Wo (1942), *Classical Analysis on Normed Spaces*, World Scientific.