BENTUK AUTOMORFISMA DOMAIN-DOMAIN BERLUBANG

Sumanang Muhtar Gozali*

Abstract

Automorfisma di cakram satuan $D(0,1)$ yang mengawetkan titik 0 adalah suatu rotasi. Dengan menghilangkan titik 0 dari cakram tersebut automorfisma di domain yang baru masih merupakan suatu rotasi. Jika diambil beberapa titik tertentu dari cakram tersebut automorfisma yang ada hanyalah identitas. Hasil tersebut merupakan akibat dari Teorema kontinuasi Riemann untuk automorfisma di domain terbatas dengan karakteristik tertentu.

1 Pendahuluan

Pada paper ini akan dibahas Teorema Kontinuasi Riemann untuk automorfisma di domain $D \setminus A$, dimana D suatu domain berlubang dan tidak mempunyai titik batas terisolasi,$A \subset D$, A suatu himpunan diskrit. Selanjutnya kita akan menggunakan teorema ini untuk melihat bentuk-bentuk automorfisma di cakram satuan berlubang. Untuk itu kita membutuhkan beberapa definisi dan teorema berikut.

Definisi 1 *Misalkan $\emptyset \neq A \subseteq \mathbf{C}$. Suatu titik $c \in A$ dikatakan terisolasi di A jika terdapat lingkungan U_c dari c sehingga $U_c \cap A = \{c\}$*

Definisi 2 *Suatu subhimpunan $A \subseteq \mathbf{C}$ dikatakan diskrit jika semua $c \in A$ terisolasi.*

Sebagai contoh, perhatikan himpunan $A = \{0, 1, i\}$. A adalah suatu himpunan diskrit di $\mathbf{C}$.

Definisi 3 *Misalkan $f : D \subseteq \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorfik kecuali di $c \in D$. Maka c disebut titik singular terisolasi dari f.*

Kita melihat bahwa 0 adalah titik singular dari $f(z) = \frac{1}{z}$. Ada tiga jenis titik singular, yaitu removable, pole, dan essensial. Masing-masing jenis ini bisa diketahui dengan melihat representasi Laurent dari fungsi yang bersangkutan. Oleh karena itu kita memerlukan teorema berikut.

Teorema 4 *Misalkan f holomorfik pada anulus $R_1 < |z - z_0| < R_2$, dan C suatu lintasan tutup sederhana berorientasi positif di anulus itu. Maka untuk setiap $z \in R_1 < |z - z_0| < R_2$ berlaku,*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n + \sum_1^\infty \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

dimana

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\ dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\ dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Bagian $\sum_1^\infty \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ pada teorema di atas disebut bagian utama f di z_0. Terkait dengan bagian utama ini, terdapat tiga kasus yang mungkin, yaitu:

1. $\exists\ b_m \neq 0$ dan $b_{m+1} = b_{m+2} = ... = 0$, dalam hal ini z_0 disebut titik singular jenis pole dengan orde m
2. $b_n = 0, \forall\ n$, dalam hal ini z_0 disebut titik singular jenis removable
3. $b_n \neq 0, \forall\ n$, dalam hal ini z_0 disebut titik singular jenis essensial.

2 Teorema Kontinuasi Riemann

3 Automorfisma di domain-domain terbatas

Untuk $M \subset D$, kita nyatakan notasi $Aut_M D = \{f \in AutD : f(M) = M\}$ Dapat ditunjukkan bahwa $Aut_M D$ suatu subgrup dari $AutD$. Lebih lanjut, jika $D \setminus M$ suatu domain dan $f \in Aut_M D$ maka $f|(D \setminus M) \in Aut(D \setminus M)$. Dengan demikian kita bisa mendefinisikan suatu homomorfisma grup dari $Aut_M D$ ke $Aut(D \setminus M)$. Khususnya kita mempunyai teorema berikut.

Teorema 5 *Jika D terbatas dan tidak mempunyai titik batas terisolasi maka untuk setiap subhimpunan diskrit dan relatif tutup $A \subseteq D$ berlaku*

$$Aut_A D \simeq Aut(D \backslash A)$$

Dengan mengambil $D = \mathbf{E}$ dan $A = \{0\}$ pada teorema 10 di atas kita memperoleh hasil berikut.

Definisi 6 *Suatu domain $D \subset \mathbf{C}$ dikatakan rigid jika $AutD = \{id\}$.*

Selanjutnya kita akan melihat contoh-contoh domain rigid di $\mathbf{E}^{\times}$. Namun untuk mengkontruksi domain demikian kita memerlukan teorema berikut serta beberapa akibatnya.

Teorema 7 *Misalkan $A \subset \mathbf{E}^{\times}, A \neq \emptyset, |A| < \infty$. Maka terdapat monomorfisma grup:*

$$\pi : Aut(\mathbf{E}^{\times} \setminus A) \longrightarrow Perm(A \cup \{0\})$$

Bukti :

■

Akibat 8 *Pemetaan $g(z) = \frac{z-c}{\bar{c}z-1}$ adalah satu-satunya automorfisma non-identitas di $\mathbf{E}^{\times} \setminus \{c\}$*

Hasil berikut memberikan suatu kriteria untuk suatu daerah rigid di $\mathbf{E}$.

Akibat 9 *Misalkan $a, b \in \mathbf{E}^{\times}, a \neq b$. Maka $Aut(\mathbf{E}^{\times} \setminus \{a, b\}) = \{id\}$ Jika dan hanya jika tidak satupun dari keempat hubungan berikut terpenuhi:*

1. $a = -b$
2. $2b = a + \bar{a}b^2$
3. $2a = b + \bar{b}a^2$
4. $|a| = |b|$ *dan* $a^2 + b^2 = ab(1 + |b|^2)$

Bukti :

Contoh 10 *(Domain Rigid)*
Perhatikan bahwa jika $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{4}$ maka tidak satupun dari keempat hubungan di atas terpenuhi. Oleh karena itu kita bisa menyimpulkan bahwa $\mathbf{E}^{\times} \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$ suatu domain rigid di $\mathbf{E}$.

* Jurusan Pendidikan Matematika, UPI.
E-mail: `msumanang@yahoo.com`