GRUP OPERATOR LINEAR DAN APLIKASINYA PADA PERSAMAAN SCHRÖDINGER

Sumanang Muhtar Gozali

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

March 24, 2010

1 Pendahuluan

Secara keseluruhan, topik utama tulisan ini adalah kelas operator linear terbatas yang mempunyai sifat-sifat grup, untuk kemudian disebut *grup operator linear*. Berbagai sifat-sifat penting serta contoh-contoh diungkapkan secara singkat dan kemudian disinggung aplikasinya pada solusi persamaan Schrödinger. Namun karena teori grup operator linear ini bisa dilihat sebagai pengembangan dari teori semigrup maka pembahasan awal kita adalah teori-teori semigrup. Kita memulai dengan definisi semigrup berikut ini.

Definisi 1.1 *Misalkan X suatu ruang Banach. Suatu klas $T = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ yang terdiri dari operator-operator linear terbatas dari X ke X dikatakan membentuk semigrup jika:*

1. $T(0) = I$, *(I adalah operator identitas di X)*
2. $T(t+s) = T(t)\ T(s), \ \forall \ t, s \geq 0.$

Dalam hal $\|T(t)\| \leq 1,\ 0 \leq t < \infty$, T disebut C_0-semigrup *kontraksi.*

Berikut ini adalah definisi generator dari semigrup yang dapat memberikan informasi penting mengenai semigrup yang dibangkitkannya.

Definisi 1.2 *Generator A dari semigrup $T = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ adalah suatu operator linear yang didefinisikan sebagai*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t}$$

Domain dari A adalah $D(A) = \{\ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x-x}{t}\ \ \textit{ada}\ \}$

Khususnya, jika semigrup T memenuhi

$$\lim_{t\to 0} T(t)x = x,\ \forall\ \ x \in X$$

T dinamakan *semigrup kontinu kuat* (C_0-semigrup).

Untuk memperjelas definisi, berikut ini dua buah contoh sederhana C_0-semigrup.

Contoh 1.1 *1. Jika X ruang Banach, dan $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ linear, terbatas maka $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ suatu C_0-semigrup.*
2. Misalkan $X = BUC[0,\infty)$, yaitu ruang fungsi kontinu seragam terbatas dengan domain $[0,\infty)$.
Definisikan:

$$(T(t)f)(s) = f(t+s),\ \forall\ f(s) \in X$$

Dapat ditunjukkan bahwa $T = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ suatu C_0-semigrup.

Telah kita ketahui bahwa untuk semigrup tertentu kita mempunyai generator yang tunggal. Bagaimana halnya dengan generator tertentu, mungkinkah membangkitkan semigrup-semigrup berbeda. Teorema berikut ini memberikan jaminan ketunggalan semigrup yang dibangkitkan oleh operator tertentu.

Teorema 1.1 *Misalkan $T = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ dan $S = \{S(t)\}_{t\geq 0}$ masing-masing adalah C_0 semigrup dengan generator masing-masing adalah A dan B.*
Jika $A = B$, maka $T(t) = S(t),\ t \geq 0$.

2 Teorema Hille-Yosida

3 Grup Operator Linier Terbatas

Suatu sistem fisis dikatakan *well-posed* jika perubahan yang cukup kecil pada kondisi awal menghasilkan perubahan yang kecil pula pada keluaran dari kondisi awal tadi. Dengan demikian, jika masalah nilai awal (MNA) (2.1) di atas bersifat *well-posed* maka solusi MNA di atas bergantung pada kondisi awal yang diberikan. Lebih lanjut, jika diasumsikan bahwa $T(t)$ memetakan solusi $u(s)$ pada waktu s ke solusi $u(t+s)$ pada waktu $t+s$ dan bahwa A tidak bergantung waktu maka $T(t)$ juga tidak bergantung waktu.

Dengan demikian solusi $u(t+\tau)$ pada waktu $t+\tau$ dapat dihitung sebagai $T(t+\tau)x$, atau $T(t)(T(\tau)x)$. Dari sifat ketunggalan solusi kita peroleh sifat

$$T(t+\tau) = T(t)T(\tau), \qquad t,\tau \geq 0$$

Dalam hal ini diasumsikan bahwa $T(0) = I$, operator identitas di X.