Grup Operator Linear

Sumanang Muhtar Gozali
UNIVERSITAS PENDIDIKAN
INDONESIA

Perhatikan sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, \quad A \in M^n(\mathbb{R}),\ x \in \mathbb{R}^n \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1}$$

Solusi sistem persamaan (1) adalah

$$x = e^{tA} x_0$$

Perhatikan bahwa operator $T(t) = e^{tA}$ memenuhi sifat semigrup

$$T(t+s) = T(t)\ T(s), \quad t, s \geq 0$$

Definisi 1 *Misalkan X suatu ruang Banach. Suatu kelas $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ yang terdiri dari operator-operator linear terbatas dari X ke X dikatakan membentuk C_0-semigrup jika:*

1. $T(0) = I$, (I *operator identitas di* X)

2. $T(t + s) = T(t)\ T(s)$, $\forall\ t, s \geq 0$

3. $\lim_{t \longrightarrow 0} \quad T(t)x = x$, $\forall\ x \in X$

Dalam hal $\|T(t)\| \leq 1$, $0 \leq t < \infty$, T disebut C_0-semigrup *kontraksi.*

Jika ketiga sifat di atas berlaku juga untuk semua $t \in \mathbb{R}$, $T = \{T(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ disebut C_0-grup.

Definisi 2 *Generator* A *dari* C_0-*semigrup* $T = \{T(t)\}_{t\geq 0}$ *adalah suatu operator linear yang didefinisikan sebagai*

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \quad .$$

Domain dari A *adalah*
$D(A) = \{\ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x-x}{t}\ \text{ ada }\}$

Definisi 3 *Misalkan* X *suatu ruang Hilbert dan operator* $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ *linear.*
Himpunan resolvent dari A *adalah*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \textit{operator} \quad \textit{invers}\,(\lambda I - A)^{-1} \textit{ ada}\}.$$

Teorema 4 *(Hille-Yosida) Operator linear A adalah generator dari C_0-semigrup kontraksi jika dan hanya jika dua pernyataan berikut dipenuhi*

1. *A tutup dan $\overline{D(A)} = X$*

2. *Himpunan resolvent $\rho(A)$ memuat $\mathbb{R}^+$ dan $\forall\ \lambda > 0$, berlaku*

$$\left\| \ \lambda(\lambda I - A)^{-1} \ \right\| \leq 1$$

Secara eksplisit, semigrup yang dibangkitkan oleh operator A adalah $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$, dengan

$$T(t)x = \lim_{\lambda \longrightarrow \infty} e^{tA_\lambda}x, \ \forall \ x \in X$$

Dalam hal ini

$$A_\lambda = \lambda A(\lambda I - A)^{-1}$$

disebut aproksimasi Yosida dari A

Contoh 5 *1. Misalkan X suatu ruang Banach dan $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ linear, terbatas. Dapat ditunjukkan bahwa kelas $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ membentuk C_0-semigrup.*

2. Misalkan $X = BUC[0, \infty)$, yaitu ruang fungsi kontinu seragam terbatas dengan domain $[0, \infty)$.
Definisikan:

$$(T(t)f)(s) = f(t+s), \ \forall \ f(s) \in X$$

Dapat ditunjukkan bahwa $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ suatu C_0-semigrup kontraksi.

3. Perhatikan persamaan difusi

$$\begin{array}{l} u_t = u_{xx} \quad (-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty) \\ u(x,0) = \phi(x) \end{array} \qquad (2)$$

Solusi tunggal persamaan (2) adalah

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t} \phi(y) dy$$

Misalkan $T(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4t}$.

Dapat diperiksa bahwa

$T(t+s) = T(t)\ T(s),$ *untuk semua* $t, s \geq 0$

Misalkan X suatu ruang Banach dan operator $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, linear dan terbatas. Perhatikan bahwa masalah nilai awal

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t), \ t \in \mathbb{R} \\ u(0) &= u_0 \in D(A) \end{aligned} \tag{3}$$

mempunyai solusi tunggal

$$u(t) = e^{tA} u_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik:

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi$$

dengan

$$\begin{aligned}
m &= massa\ partikel \\
\hbar &= \frac{h}{2\pi} \\
\omega &= \frac{2\pi c}{\lambda} \\
c &= kecepatan\ cahaya \\
\lambda &= panjang\ gelombang\ cahaya \\
h &= konstanta\ Planck
\end{aligned}$$

Persamaan Schrödinger abstrak adalah persamaan yang berbentuk

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dt}u(t) & = -iAu(t), \ t \in \mathbb{R} \\ u(0) & = x \in D(A) \end{array} \qquad (4)$$

dengan A suatu operator adjoint dengan diri sendiri.

Teorema 6 *Misalkan* $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ *suatu operator adjoint dengan diri sendiri pada ruang Hilbert* X *atas* $\mathbb{C}$. *Maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku:*

1. *Terdapat grup uniter* $S(t)$ *secara tunggal yang dibangun oleh operator skew-adjoint* $-iA$

2. *Untuk setiap* $u_0 \in D(A)$, *fungsi*

$$u(t) = S(t)u_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

adalah solusi persamaan (4).

Secara eksplisit, $S(t) = e^{-itA}$

Klaim 7 *Persamaan Schrödinger*

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\psi$$

dapat dinyatakan dalam bentuk abstrak

$$\psi_t = -\frac{it\overline{H}}{\hbar}\psi$$

Bukti: Kita mengasumsikan $X = L_2^{\mathbb{C}}(\mathbb{R})$.

1. Definisikan Hamiltonian formal $H{:}D(H) \subseteq X \longrightarrow X$ dari osilator harmonik,

$$H\phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\phi_{xx} + \frac{m\omega^2}{2}x^2\phi$$

Definisikan:

(a) $\|u\|_{p,q} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^p)\sum_{n=0}^{q}\left|u^{(n)}(x)\right|$, $p, q = 0, 1, 2, .$

(b) $C_{p,q} = \{u \in C^\infty | u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},\ \|u\|_{p,q} < \infty\}$

Domain dari H adalah $D(H) = \bigcap_{p,q} C_{p,q},\ p, q = 0, 1, 2, ...$

2. Fungsi hermitian u_n didefinisikan sebagai

$$u_n(x) = \alpha_n(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \; n = 0, 1, 2, . . .$$

dimana $\alpha_n = \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{1}{4}} (n!)^{\frac{1}{2}}}$

3. **Proposisi 8** *Terkait dengan hamiltonian formal H, sifat-sifat berikut dipenuhi:*

   (a) H *simetris*

   (b) *Untuk semua* $n = 0, 1, 2, \ldots$

   $$H\phi_n = E_n\phi_n$$

   dimana

   $$\begin{aligned} \phi_n(x) &= u_n\left(\frac{x}{x_0}\right)x_0^{-\frac{1}{2}} \\ x_0 &= \left(\frac{h}{m\omega}\right)^{\frac{1}{2}} \\ E_n &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

   (c) $\{\phi_n\}$ *adalah sistem ortonormal lengkap di* X

4. Definisikan Hamiltonian
$\overline{H} : D(\overline{H}) \subseteq X \longrightarrow X$, dimana

$$\overline{H}\phi = \sum_{0}^{\infty} E_n(\phi_n|\phi)\phi_n$$

Dapat ditunjukkan bahwa:

(a) $\overline{H}$ adjoint dengan diri sendiri

(b) $\overline{H}$ merupakan perluasan dari hamiltonian formal H.

5. Persamaan Schrödinger

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}\psi$$

dapat dituliskan sebagai

$$\psi_t = -\frac{it\overline{H}}{\hbar}\psi$$

6. Jika $\psi(0) = \psi_0$, maka

$$\psi(t) = e^{-\frac{it\overline{H}}{\hbar}} \psi_0, \quad t \in \mathbb{R} \tag{5}$$

dan (5) ini adalah solusi tunggal untuk

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\psi$$

Bukti kesimetrisan H:

Untuk semua $\phi, \psi \in D(H)$

$$
\begin{aligned}
(\phi|\psi) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi''}\psi dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \overline{\phi}'(x)\psi(x)|_{-N}^{N} - \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}'\psi' dx \\
&= -\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}'\psi' dx \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}\psi'' dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(H\phi|\psi) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{(-\frac{\hbar^2}{2m}\phi'' + \frac{m\omega^2}{2}x^2\phi)}\psi dx \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{-\frac{\hbar^2}{2m}\phi''}\psi dx + \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\frac{m\omega^2}{2}x^2\phi}\psi dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi''}\psi dx + \frac{m\omega^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{x^2\phi}\psi dx \\
&= -\frac{\hbar^2}{2m}\textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}\psi'' dx + \frac{m\omega^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}x^2\psi dx \\
&= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi}(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + \frac{m\omega^2}{2}x^2\psi) dx \\
&= (\phi|\ H\psi)
\end{aligned}
$$

Jadi

$$(\phi|H\psi) = (H\phi|\psi),\ \forall\ \phi, \psi \in D(H)$$

Bukti untuk $\overline{H} = \overline{H}^*$

1. $\overline{H} \subseteq \overline{H}^*$
   misalkan $\phi, \psi \in D(\overline{H})$

$$\begin{aligned}(\overline{H}\phi|\psi) &= (\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\phi_n|\phi)\phi_n|\psi) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\phi|\phi_n)(\phi_n|\psi) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\phi_n|\psi)(\phi|\phi_n) \\ &= (\phi|\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\phi_n|\psi)\phi_n) \\ &= (\phi|\overline{H}\psi)\end{aligned}$$

2. $D(\overline{H}^*) \subseteq D(\overline{H})$
   Misalkan $\phi \in D(\overline{H}^*)$

$$\begin{aligned}(\phi_n|\overline{H}^*\phi) &= (\overline{H}\phi_n|\phi) \\ &= (\textstyle\sum_{n=0}^{\infty} E_k(\phi_k|\phi_n)\phi_k \\ &= E_n(\phi_n|\phi), \forall\ n\end{aligned}$$

   Oleh karena itu kita peroleh

$$\begin{aligned}\overline{H}^*\phi &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}(\phi_n|\overline{H}^*\phi)\phi_n \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} E_n(\phi_n|\phi)\phi_n\end{aligned}$$

   Jadi $D(\overline{H}^*) \subseteq D(\overline{H})$.

Bukti $H \subset \overline{H}$

Misalkan $\phi \in D(H)$,

Karena $\{\phi_n\}$ suatu sistem ortonormal lengkap di X dan $\overline{H}$ simetris, kita peroleh

$$\overline{H}\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_n|\overline{H}\phi)\phi_n = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(\phi_n|\phi)\phi_n$$

Deret terakhir ini konvergen, yang artinya bahwa $\phi \in D(\overline{H})$.

Jadi $\overline{H}$ adalah perluasan dari H.

Definisi 9 *Misalkan* $G = \{G(t)\}_{t \geq 0}$ *suatu semigrup. Semigrup adjoint* G^* *dari G adalah* $G^* = \{G(t)^*\}_{t \geq 0}$*, dimana* $G(t)^*$ *adalah adjoint dari G(t).*

Teorema 10 *Misalkan* X *suatu ruang Hilbert dan* $T = \{T(t)\}_{t \geq 0}$ *suatu* C_0-*semigrup di* X *dengan generator* A*. Maka semigrup adjoint* $T^* = \{T(t)^*\}_{t \geq 0}$ *juga suatu* C_0-*semigrup dengan generator* A^**.*

Contoh 11 *(Semigrup adjoint) Misalkan* $X = L^2(\mathbb{R})$.
Untuk $setiap$ $t \geq 0$, *definisikan*

$$(G(t)u)(x) = u(x+t), \ \forall \ u \in X.$$

Dapat ditunjukkan bahwa $G = \{G(t)\}_{t \geq 0}$ *suatu semigrup yang dikenal dengan semigrup translasi kiri, dengan generator* A, *dimana* $Au = D^{+}u$ *(turunan kanan)*

Selanjutnya, perhatikan semigrup adjoint $G^* = \{G(t)^*\}_{t \geq 0}$, *akan ditunjukkan bahwa generator dari* G^* *adalah* A^*.

Misalkan $u, v \in X$. *Definisikan hasil kali dalam*

$$\langle u, v \rangle_X = \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x) \ dx.$$

Jelas bahwa dengan mendefinisiskan

$$(S(t)u)(x) = u(x-t), \ \forall \ u \in X,$$

kita dapatkan

$$\begin{aligned}\langle G(t)u, v\rangle_X &= \int_{\mathbb{R}} u(x+t)v(x)\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x)v(x-t)\ dx\\ &= \langle u, S(t)v\rangle_X\end{aligned}$$

Jadi $S(t) = G(t)^*,\ t \geq 0$.
Misalkan B *generator dari* G^*, *yaitu*

$$\begin{aligned}Bu &= \lim_{t\to 0^+} \frac{G(t)^*u-u}{t}\\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{u(x-t)-u(x)}{t}\\ &= -D^-u\end{aligned}$$

Selanjutnya akan diperiksa apakah $A^* = -D^-$.

$$\begin{aligned}\langle Au, v\rangle_X &= \int_{\mathbb{R}} u'v.\\ &= uv|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} uv'\\ &= \int_{\mathbb{R}} u(-v')\\ &= \left\langle u, -D^-v\right\rangle_X\end{aligned}$$

($uv|_{-\infty}^{\infty} = 0$, *karena* $u, v \in L^2(\mathbb{R})$*.)*
Dalam hal ini $D(A) = D(A^*) = \mathbb{H}^1$.