

NORM VEKTOR DAN NORM MATRIKS

Sumanang Muhtar Gozali

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

1. Pendahuluan

Jika kita membicarakan topik ruang vektor maka contoh sederhana yang dapat kita ambil adalah ruang Euclid \mathbb{R}^n . Di ruang ini kita mendefinisikan panjang (Euclid) vektor yang dapat kita anggap sebagai “ukuran” vektor tersebut. Dengan konsep panjang ini kita dapat membandingkan antara dua buah vektor, yaitu dengan membandingkan panjang keduanya. Disamping itu kita juga dapat mengukur jarak antara dua buah vektor dengan menghitung panjang dari selisih kedua vektor tersebut.

Bagaimana halnya dengan ruang matriks M_n yang merupakan ruang vektor dengan dimensi lebih besar? Ukuran vektor seperti apa yang dapat kita definisikan di sana? Bagaimana pula dengan ruang vektor yang melibatkan bilangan kompleks atau bahkan ruang vektor berdimensi tak hingga, seperti ruang-ruang fungsi. Untuk menjawab masalah ini kita perlu membicarakan konsep norm yang dapat kita anggap sebagai bentuk perumuman dari panjang Euclid.

Definisi 1.

Misalkan V suatu ruang vektor atas F (real atau kompleks).

Suatu fungsi $\|\bullet\|: V \rightarrow \mathbb{R}$ disebut *norm* vektor jika untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

$$(1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(1a) \quad \|x\| = 0 \quad \text{jika dan hanya jika} \quad x = 0$$

$$(2) \quad \|cx\| = |c| \|x\| \quad \text{untuk semua} \quad c \in F$$

$$(3) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Suatu fungsi yang memenuhi (1), (2) dan (3) tanpa perlu memenuhi (1a) disebut *seminorm*. Dalam hal ini kita dapat memandang seminorm sebagai perumuman dari norm.

Salah satu konsep penting yang terkait dengan panjang vektor di ruang Euclid adalah sudut antara dua vektor. Lebih khusus lagi adalah konsep ortogonalitas antara dua vektor x dan y melalui definisi perkalian titik $x \bullet y = 0$. Dalam hal ini kita akan melihat perumuman dari perkalian titik ini yaitu konsep perkalian dalam yang banyak kaitannya dengan konsep norm di atas.

Definisi 2.

Misalkan V suatu ruang vektor atas F (real atau kompleks).

Suatu fungsi $\langle \bullet, \bullet \rangle : V \times V \rightarrow F$ disebut *perkalian dalam* jika untuk semua $x, y, z \in V$ berlaku,

$$(1) \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

$$(1a) \quad \langle x, x \rangle = 0 \quad \text{jika dan hanya jika} \quad x = 0$$

$$(2) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(3) \quad \langle cx, y \rangle = c \langle x, y \rangle \quad \text{untuk semua} \quad c \in F$$

$$(4) \quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$$

Nampak sekali beberapa kemiripan sifat yang dipenuhi oleh norm dan perkalian dalam yang memungkinkan untuk memperoleh yang satu dari yang lainnya. Lebih lanjut kita mempunyai akibat berikut.

Akibat 3.

Jika $\langle \bullet, \bullet \rangle$ menyatakan suatu perkalian dalam di ruang vektor V atas F maka

$$\|x\| \equiv \langle x, x \rangle^{1/2}$$

memenuhi sifat-sifat norm di V .

Norm ini dikatakan *norm yang diinduksi dari perkalian dalam* $\langle \bullet, \bullet \rangle$.

Dengan menggunakan Akibat 3 ini, jika kita mempunyai suatu ruang perkalian dalam X maka dalam waktu yang sama kita bisa memandang X sebagai ruang bernorm dengan norm yang diinduksi dari perkalian dalam tersebut.

3. Sifat-sifat aljabar norm vektor

Kita telah mendefinisikan beberapa norm pada ruang vektor V , bagaimanakah kita memperoleh bentuk norm yang baru dari norm-norm yang sudah ada. Dalam hal ini, jika kita mempunyai dua buah norm $\|\bullet\|_\alpha$ dan $\|\bullet\|_\beta$ maka dapat diperiksa bahwa semua definisi berikut memenuhi sifat-sifat norm.

- a. $\|x\| \equiv \|x\|_\alpha + \|x\|_\beta$
- b. $\|x\| \equiv c \|x\|_\alpha, c > 0$
- c. $\|x\| \equiv \max \{ \|x\|_\alpha, \|x\|_\beta \}$

Teorema 7. (Ekuivalensi Norm)

Misalkan $\|x\|_\alpha$ dan $\|x\|_\beta$ masing-masing adalah norm di ruang berdimensi hingga V .

Maka terdapat konstanta C_m dan C_n sehingga berlaku

$$C_m \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq C_n \|x\|_\beta$$

Akibat penting dari teorema ini dinyatakan dalam rumusan berikut ini.

Akibat 8.

Misalkan $\{x^{(k)}\}$ suatu barisan di ruang vektor berdimensi hingga V dan $\|x\|_\alpha, \|x\|_\beta$ masing-masing adalah norm di V . Maka pernyataan berikut ekuivalen:

- a. $\{x^{(k)}\} \rightarrow x$ terhadap norm $\|x\|_\alpha$
- b. $\{x^{(k)}\} \rightarrow x$ terhadap norm $\|x\|_\beta$

Dengan mengacu pada ekuivalensi norm di atas maka semua norma di R^n ekuivalen dengan $\|\bullet\|_\infty$. Akibatnya jika $\{x^{(k)}\} \rightarrow x$ terhadap sebarang norm di R^n maka ini ekuivalen dengan $\lim x_i^{(k)} = x_i$ untuk semua $i = 1, \dots, n$

Seringkali masalah yang dihadapi adalah apakah suatu barisan itu konvergen atau tidak di V , tanpa perlu mengetahui titik limit kekonvergenannya. Dalam hal ini kita akan melihat kriteria Cauchy untuk kekonvergenan barisan di ruang berdimensi hingga.

Definisi 9 (Barisan Cauchy)

Suatu barisan $\{x^{(k)}\}$ disebut barisan Cauchy terhadap norm $\|\bullet\|$ jika berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat positif $N(\varepsilon)$ sehingga berlaku

$$\|x^{(k_1)} - x^{(k_2)}\| \leq \varepsilon \quad \text{untuk semua} \quad k_1, k_2 \geq N(\varepsilon)$$

Adapun kriteria Cauchy untuk kekonvergenan diberikan oleh teorema berikut ini.

Norm Matriks

Ruang matriks M_n adalah suatu ruang vektor berdimensi n^2 . Dengan demikian sifat-sifat norm vektor di ruang berdimensi hingga tetap berlaku di sana. Perbedaannya, untuk sebarang A dan B di M_n kita dapat mengalikan keduanya yang menghasilkan matriks baru AB di M_n juga. Sangatlah wajar jika kita menginginkan suatu ukuran matriks yang memberikan hubungan antara ukuran ketiganya.

Definisi 11

Suatu fungsi $\|\bullet\| : M_n \rightarrow R$ disebut norm matriks jika untuk sebarang $A, B \in M_n$ berlaku lima aksioma berikut:

- (1). $\|A\| \geq 0$
- (1a). $\|A\| = 0$ jika dan hanya jika $A = 0$
- (2). $\|cA\| = |c| \|A\|$ untuk semua scalar kompleks c .

- (3). $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
- (4). $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (sub-multiplikatif)

Pada definisi di atas keempat sifat pertama tidak lain merupakan sifat-sifat norm vektor. Adapun sifat terakhir ditambahkan untuk menghubungkan “ukuran” matriks-matriks A , B dan hasil perkalian keduanya yaitu matriks AB . Inilah yang membedakan norm matriks dengan norm vektor.

Dengan melihat keterkaitan antara ruang M_n dan C^n maka kita dapat mendefinisikan suatu norm di M_n dengan melibatkan norm di C^n seperti pada definisi berikut.

Contoh-contoh Norm Matriks

Disamping norm matriks natural di atas ada beberapa contoh norm matriks yang lain, diantaranya:

1. Norm jumlah kolom maksimum

$$\|A\|_1 \equiv \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

2. Norm jumlah baris maksimum

$$\|A\|_\infty \equiv \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

3. Norm Spektral

$$\|A\|_2 \equiv \max \{ \sqrt{\lambda} : \lambda \text{ nilai eigen dari } A^* A \}$$

4. Norm similaritas

Misalkan $\|\bullet\|$ suatu norm di M_n dan S matriks non-singular di M_n . Definisikan

$$\|A\|_S \equiv \|S^{-1}AS\| \text{ untuk semua } A \in M_n$$

Bukti:

Sifat (1) sampai sifat (3) cukup mudah dibuktikan, adapun sifat (4) adalah berdasarkan fakta:

$$\|AB\|_S \equiv \|S^{-1}ABS\| = \|(S^{-1}AS)(S^{-1}BS)\| \leq \|S^{-1}AS\| \|S^{-1}BS\| = \|A\|_S \|B\|_S$$

Teorema 15

Jika $\|\bullet\|$ adalah sebarang norm matriks di M_n dan $A \in M_n$ maka berlaku

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Kekonvergenan

Selanjutnya kita ingin mengkarakterisasi kekonvergenan suatu matriks A . Dalam hal ini apa syarat cukup agar berlaku $A^k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Terkait dengan hal ini kita mempunyai lema berikut.

Lema 16

Misalkan $A \in M_n$ sebarang. Jika terdapat norm matriks $\|\bullet\|$ sehingga berlaku $\|A\| < 1$

Maka $\lim A^k = 0, k \rightarrow \infty$ yaitu semua entri dari A^k menuju 0.

Pada lema di atas kita melihat kondisi yang harus dipenuhi oleh A yang mengakibatkan A konvergen. Bagaimana halnya hubungan antara kekonvergenan A dengan radius spektralnya, diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 17

Misalkan $A \in M_n$. Maka berlaku

$$\lim A^k = 0, k \rightarrow \infty \text{ jika dan hanya jika } \rho(A) < 1$$

MATRIKS DEFINIT POSITIF

Pada bagian ini kita akan mendiskusikan satu jenis matriks, yaitu definit dan semi definit positif . Jenis matriks ini erat kaitannya dengan konsep-konsep di bidang analisis.

Definisi 1

Suatu matriks Hermitian $A \in M_n$ dikatakan *definit positif* jika

$$x^* Ax > 0, \quad \text{untuk semua } x \in C^n$$

Jika ketaksamaan di atas diperlemah menjadi $x^* Ax \geq 0$ maka A dikatakan *semidefinit positif*. Secara implicit, ruas kiri pada ketaksamaan di atas menyatakan suatu bilangan real.

Beberapa sifat penting berkaitan dengan matriks definit positif adalah:

- Penjumlahan sebarang dua buah matriks definit positif menghasilkan matriks definit positif juga. Secara umum berlaku sebarang kombinasi linear nonnegative dari matriks-matriks semidefinit positif menghasilkan matriks semidefinit positif

Bukti:

Misalkan A dan B keduanya semidefinit positif, dan $a, b \geq 0$.

Perhatikan bahwa $x^*(aA + bB)x = a(x^*Ax) + b(x^*Bx) \geq 0$ untuk semua $x \in C^n$.

- Setiap nilai eigen dari matriks definit positif adalah bilangan real positif

Bukti:

Misalkan A definit positif dan $\lambda \in \sigma(A)$, yaitu suatu nilai eigen dari A dan x adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan λ . Perhatikan,

$$x^* Ax = x^* \lambda x = \lambda x^* x.$$

Oleh karena itu kita peroleh $\lambda = \frac{(x^* Ax)}{x^* x}$ dimana pembilang dan penyebut

keduanya positif.

- Sebagai akibat dari bagian (b), trace dan determinan dari matriks definit positif adalah positif

Karakterisasi Matriks Definit Positif

Pada bagian ini kita akan melihat syarat cukup yang harus dipenuhi oleh matriks definit dan semidefinit positif yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2

1. Suatu matriks Hermitian $A \in M_n$ adalah semidefinit positif *jika dan hanya jika* semua nilai eigennya nonnegative.
2. Suatu matriks Hermitian $A \in M_n$ adalah definit positif *jika dan hanya jika* semua nilai eigennya positif.

Bukti:

Jika setiap nilai eigen dari A adalah positif maka untuk sebarang vektor tak nol $x \in C^n$ berlaku

$$x^*Ax = x^*U^*DUx = y^*Dy = \sum_{i=1}^n d_i \overline{y_i} y_i = \sum_{i=1}^n d_i |y_i|^2 > 0$$

Dimana D adalah matriks diagonal dengan entri-entri diagonal adalah nilai-nilai eigen dari A , $y = Ux$ dan U uniter.

Dengan menggunakan teorema di atas kita dapat memperoleh akibat berikut

Akibat 3

Jika $A \in M_n$ suatu matriks semidefinit positif maka demikian juga matriks A^k , $k = 1, 2, \dots$

Bukti:

Jika λ adalah suatu nilai eigen dari A maka λ^k adalah nilai eigen untuk A^k .

Berdasarkan Teorema di atas maka A^k semidefinit positif.

Matriks Gram

Terkait dengan perkalian dalam di ruang vektor kita dapat membentuk suatu matriks semi definit positif melalui matriks Gram. Adapun definisi dari matriks Gram adalah sebagai berikut

Definisi 5

Misalkan $\{v_1, \dots, v_k\}$ adalah himpunan k buah vektor pada ruang hasil kali dalam V dengan perkalian dalam $\langle \bullet, \bullet \rangle$. Matriks Gram dari $\{v_1, \dots, v_k\}$ terhadap perkalian dalam $\langle \bullet, \bullet \rangle$ adalah matriks $G = [g_{ij}] \in M_k$ dengan $g_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle$.

Sifat-sifat utama dari matriks Gram dinyatakan melalui teorema berikut ini.

Teorema 6

Misalkan $G \in M_k$ adalah matriks Gram dari vektor-vektor $\{w_1, \dots, w_k\} \subset C^n$ terhadap perkalian dalam $\langle \bullet, \bullet \rangle$ dan misalkan $W = [w_1, \dots, w_k] \in M_{n,k}$. Maka berlaku

- a. G semidefinit positif
- b. G nonsingular jika dan hanya jika $\{w_1, \dots, w_k\}$ bebas linear
- c. Terdapat matriks definit positif $A \in M_n$ sehingga berlaku $G = W^* A W$
- d. $\text{Rank } G = \text{rank } W =$ Banyak maksimum vektor-vektor yang bebas linear pada himpunan $\{w_1, \dots, w_k\}$