ORTOGONALITAS DI RUANG NORM-2

Sumanang Muhtar Gozali

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

1. Pendahuluan

Salah satu konsep penting di ruang vektor adalah ortogonalitas antara dua vektor. Sisi penting dari ortogonalitas ini dapat dilihat dari kaitannya dengan konsep proyeksi, ortonormalitas serta aproksimasi di ruang vektor.

Dalam suatu ruang hasil kali dalam (*X*, <,>) ortogonalitas dua vektor *x* dan *y* didefinisikan melalui hubungan $\langle x, y \rangle = 0$. Sebagai implikasi dari sifat-sifat hasil kali dalam maka dengan mudah dapat diperiksa bahwa ortogonalitas di ruang hasil kali dalam memenuhi sifat-sifat utama berikut ini:

1. Nondegenerasi:

   $x \perp x \quad \Rightarrow \quad x = 0$
2. Simetris:

   $x \perp y \quad \Rightarrow \quad y \perp x$
3. Homogenitas:

   $x \perp y \quad \Rightarrow \quad \alpha x \perp \beta y \quad \forall \alpha, \beta \in R$
4. Aditifitas:

   $x \perp y \quad , \quad x \perp z \quad \Rightarrow \quad x \perp y + z$
5. Resolvabilitas:

   Untuk $x(\neq 0), y$ di *X* terdapat *a* sehingga $x \perp ax + y$

R.C. James memandang bahwa sifat terakhir ini merupakan yang terpenting yang menjadikan ortogonalitas tidak "hampa". Dengan kata lain sifat terakhir ini merupakan perumuman dari fakta bahwa "untuk setiap vektor di bidang senantiasa ada vektor lain yang orthogonal terhadap vektor tersebut".(lihat [3])

Dalam suatu ruang norm (*X*, ||.||) dikenal beberapa rumusan ortogonalitas antara dua vektor, diantaranya yang cukup terkenal adalah:

a. Ortogonalitas-P (Phytagorean):

$$x \perp^{P} y \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$$

b. Ortogonalitas-I (Isosceles):

$$x \perp^{I} y \quad \Leftrightarrow \quad \|x+y\| = \|x-y\|$$

c. Ortogonalitas-BJ (Birkhoff-James):

$$x \perp^{BJ} y \quad \Leftrightarrow \quad \|x\| \le \|x+\alpha y\| \quad \forall \alpha \in R$$

Dapat diperiksa bahwa dalam suatu ruang hasil kali dalam (X, $<,>$) serta dengan mengacu pada norm $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ ketiga definisi ortogonalitas di atas ekuivalen dengan $\langle x, y \rangle = 0$. Implikasi selanjutnya adalah bahwa ketiga konsep ortogonalitas di atas juga memenuhi kelima sifat utama yang disebutkan di atas.

Adapun dalam ruang norm yang umum ketiga definisi di atas secara umum tidaklah ekuivalen (lihat [2], [3]). Di samping itu di antara sekian sifat ortogonalitas di ruang hasil kali dalam hanya beberapa sifat saja yang dapat dipenuhi oleh masing-masing rumusan ortogonalitas di atas. Hubungan ekuivalensi antara berbagai definisi ortogonalitas di ruang norm serta sifat utama masing-masing dapat dilihat di [1] dan [2].

2. Ortogonalitas di ruang norm-2

Pada bagian ini akan diperkenalkan konsep ruang norm-2 serta beberapa rumusan ortogonalitas di dalamnya.

Definisi 1. Misalkan X suatu ruang vektor berdimensi 2 atau lebih. Suatu fungsi $\|.,.\| : X \times X \to R$ disebut norm-2 jika memenuhi semua sifat berikut:

(N1) $\|x, y\| \ge 0$ untuk semua $x, y \in X$ dan

$\|x,y\| = 0$ jika dan hanya jika x dan y bergantung linear.

(N2) $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in X$

(N3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \, \|x, y\|$ untuk semua $\alpha \in R$, $x, y \in X$

(N4) $\|x + y, z\| \le \|x, z\| + \|y, z\|$ untuk semua $x, y, z \in X$

Selanjutnya, kita menyebut (X, $\|.,.\|$) sebagai ruang norm-2.

Jika X suatu ruang hasil kali dalam dengan dimensi paling kecil 2, kita dapat mendefinisikan norm-2 sebagai berikut:

$$\|x,y\| = \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle x,y\rangle & \langle y,y\rangle \end{vmatrix}^{1/2}$$

Ini yang dikenal sebagai norm-2 baku dan terhadap norm-2 ini kita menyebut $(X, \|.,.\|)$ sebagai ruang norm-2 baku. Untuk selanjutnya pada makalah ini diasumsikan $\dim(X) \geq 3$ kecuali jika dinyatakan lain.

Sebagaimana halnya di ruang norm, di ruang norm-2 juga dikenal berbagai rumusan ortogonalitas antara dua vektor. Sebagai bentuk analogi dari ortogonalitas-P, -I dan –BJ, **Khan** dan **Siddiqui** merumuskan ortogonalitas di ruang norm-2 sebagai berikut:

$$x \perp^P y \iff \|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 = \|x+y,z\|^2 \quad \forall z \in X$$

$$x \perp^I y \iff \|x+y,z\| = \|x-y,z\| \quad \forall z \in X$$

$$x \perp^{BJ} y \iff \|x,z\| \leq \|x+\alpha y,z\| \quad \forall \alpha \in R,\ z \in X$$

Kemudian **H. Gunawan** dll (lihat [5]) mendiskusikan kekurangan mendasar dari semua definisi ini dan memperbaikinya dengan rumusan berikut ini:

Definisi 2

$$(H1) \quad x \perp^P y \iff \textit{terdapat subruang } V \subseteq X \textit{ dengan co}\dim(V) = 1 \textit{ sehingga}$$
$$\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 = \|x+y,z\|^2 \quad \forall z \in V$$

$$(H2) \quad x \perp^I y \iff \textit{terdapat subruang } V \subseteq X \textit{ dengan co}\dim(V) = 1 \textit{ sehingga}$$
$$\|x+y,z\| = \|x-y,z\| \quad \forall z \in V$$

$$(H3) \quad x \perp^{BJ} y \iff \textit{terdapat subruang } V \subseteq X \textit{ dengan co}\dim(V) = 1 \textit{ sehingga}$$
$$\|x,z\| \leq \|x+\alpha y,z\| \quad \forall z \in V, \alpha \in R$$

Sementara itu rumusan agak berbeda diberikan oleh **Mazaheri** (lihat [4]) yang memperkenalkan konsep ortogonalitas-b, yaitu:

$$x \perp^b y \iff \textit{terdapat } b \in X \ \textit{ sehingga } \ \|x,b\| \neq 0 \textit{ dan}$$
$$\|x,b\| \leq \|x+\alpha y,b\| \quad \forall \alpha \in R$$

Nanti kita akan melihat konsekuensi dari semua definisi ini.

3. Ekuivalensi dan beberapa sifat utama

Fakta 3.

Misalkan (X, <,>) suatu ruang hasil kali dalam dengan $\dim(X) \geq 3$ dan X dilengkapi dengan norm-2 baku. Maka berlaku

$$x \perp^{P} y \quad \Leftrightarrow \quad x \perp^{I} y \quad \Leftrightarrow \quad x \perp^{BJ} y$$

Bukti:….

Lebih lanjut dapat ditunjukkan bahwa ketiga definisi yang adalah ekuivalen dengan $\langle x, y \rangle = 0$.

Adapun di ruang norm-2 yang umum ketiga definisi yang diberikan H. Gunawan tidaklah ekuivalen sebagaimana ditunjukkan contoh berikut ini.

Contoh 4: ????????

Jika kita perhatikan definisi yang dikemukakan Mazahaeri jelas tidak ekuivalen dengan yang ditawarkan H. Gunawan bahkan di ruang norm-2 sekalipun. Hal ini dapat dilihat dari contoh berikut ini.

Contoh 5:

3.2. Sifat-sifat utama

Terkait dengan sifat-sifat ortogonalitas di ruang norm-2 terdapat beberapa fakta berikut.

Fakta 6.

Di ruang norm-2 baku semua definisi yang dikemukakan H. Gunawan memenuhi sifat-sifat ortogonalitas di ruang hasil kali dalam.

Fakta 7. Di ruang norm-2 umum berlaku:

1. Ketiga definisi yang diberikan H. Gunawan memenuhi sifat nondegenerasi
2. Ortogonalitas-P dan –I memenuhi sifat simetris

Adapun tiga sifat lainnya yaitu homogenitas, aditifitas dan resolvabilitas cukup sulit diperiksa, namun dugaan sementara secara umum tidak dipenuhi. Hal ini berdasarkan pengamatan bahwa di ruang norm umum juga tidak berlaku.

4. Kesimpulan

Rumusan yang beragam dapat dikemukakan untuk definisi ortogonalitas di ruang norm-2. Namun demikian pengkajian terhadap sifat-sifat serta konsekuensi penting dari masing-masing definisi tersebut dapat memperjelas esensi masing-masing rumusan. Lebih lanjut kita perlu memeriksa ekuivalensi semua rumusan yang ada. Karena ortogonalitas di ruang norm-2 itu sebagai bentuk generalisasi konsep ortogonalitas di ruang norm dan ruang hasil kali dalam maka sejatinya rumusan yang ada itu cocok dengan ortogonalitas biasa.

Referensi

1. J. ALONSO, C. BENITEZ, *Orthogonality in Normed Linear Spaces: A Survey. Part I: Main Properties*. Extracta Mathematicae 3, n.1, 1-15 (1988)

2. J. ALONSO, C. BENITEZ, *Orthogonality in Normed Linear Spaces: A Survey. Part II: Relations Between Main Orthogonalities*. Extracta Mathematicae 4, n.3, 121-131 (1989)

3. R.C. JAMES Orthogonality in Normed Linear Spaces. (1945)

4. H. MAZAHERI, S. GOLESTANI NEZHAD. *Some Results on b-Orthogonality in 2-Normed Linear Spaces*. Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 1, 2007, no 14, 681-687

5 H. GUNAWAN, MASHADI, SRI GEMAWATI, NURSUPIAMIN, IDHA SIHWANINGRUM. *Orthogonality in 2-Normed Spaces Revisited*. Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak Ser. Mat. 17 (2006), x-x