

Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2

Sumanang Muhtar Gozali
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

Seminar S3 Matematika dan Pendidikan Matematika UNESA
8 Agustus 2009

Outline

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

1 Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

2 Ortogonalitas di Ruang Norm-2

Ortogonalitas- b
di
Ruang
Norm-2

3 Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2

Definition 1.1

Misalkan X adalah ruang vektor real dengan $\dim(X) \geq 2$. Suatu fungsi bernilai real $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut *norm-2* di X jika memenuhi:

- (1) $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x, y bergantung linear.
- (2) $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in X$.
- (3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.
- (4) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in X$.

Pasangan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ disebut *ruang norm-2*.

Example 1.2

Misalkan X suatu ruang vektor dengan $\dim(X) \geq 2$, dan X' menyatakan ruang dual. Gähler mendefinisikan norm-2 $\|.,.\|^*$ di X melalui

$$\|x, y\|^* := \sup_{\substack{f, g \in (X)' \\ \|f\|, \|g\| \leq 1}} \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}$$

Contoh

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas-
 b di
Ruang
Norm-2

Example 1.3

Misalkan $X = \mathbb{R}^2$. Definisikan

$$\|x, y\| := |x_1 y_2 - x_2 y_1|, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

Secara geometris, norm-2 ini merupakan luas jajaran genjang yang dibentuk oleh x dan y .

Definition 2.1

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ suatu ruang norm dan x, y adalah dua buah vektor di X .
Jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\|x\| \leq \|x + \alpha y\|,$$

maka x memenuhi ortogonalitas Birkhof-James terhadap y , dinotasikan $x \perp_{BJ} y$.

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

**Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2**

Ortogonalitas-
 b di
Ruang
Norm-2

Ortogonalitas di Ruang Norm-2?

Definition 2.2

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang norm-2 dan x, y adalah dua buah vektor di X .
Jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in X$ berlaku

$$\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\|,$$

maka x dan y memenuhi $x \perp^{BJ} y$.

Catatan:

Definisi ini terlalu ketat sehingga tidak ada dua vektor yang ortogonal di ruang norm-2 baku.

Definition 2.3

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang norm-2 dan x, y adalah dua buah vektor di X .
 $x \perp^{BJ} y \Leftrightarrow$ terdapat $V \subseteq X$ dengan $\text{codim}(V) = 1$ sehingga

$$\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\| \text{ untuk semua } \alpha \in \mathbb{R}, z \in V.$$

Ortogonalitas- b (versi Mazaheri)

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas-
 b di
Ruang
Norm-2

Definition 3.1

Misalkan X suatu ruang norm-2 dan $x, y \in X$. $x \perp^b y \Leftrightarrow$ terdapat $b \in X$ dengan $\|x, b\| \neq 0$ sehingga $\|x, b\| \leq \|x + \alpha y, b\|$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2 Umum

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas- b
di
Ruang
Norm-2

Theorem 3.2

Catatan

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

**Ortogonalitas-
 b di
Ruang
Norm-2**

Definition 3.3

Misalkan $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ruang hasil kali dalam dengan dimensi $d \geq 2$. Kita mendefinisikan *hasil kali dalam-2 baku* di X melalui

$$\langle x, y|z \rangle := \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, z \rangle \end{vmatrix}.$$

Dalam hal ini, $\|x, z\|_S := \langle x, x|z \rangle^{\frac{1}{2}}$ memenuhi kondisi fungsi norm-2, dan disebut norm-2 baku.

Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2 Baku

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas- b
di
Ruang
Norm-2

Fact 3.4

Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2 Baku

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas- b
di
Ruang
Norm-2

Theorem 3.5

Ruang
Norm- n

S. M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas-
 b di
Ruang
Norm-2

Terima Kasih