Ruang Banach

Sumanang Muhtar Gozali

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

Satu konsep penting di kuliah Analisis Fungsional adalah teori ruang Banach. Pada bagian ini akan direviu definisi, contoh-contoh, serta sifat-sifat penting ruang Banach . Kita akan memulai dengan definisi berikut.

Definisi [Norm]

Misalkan V suatu ruang vektor atas R .

Suatu fungsi $\|\bullet\| : V \to R$ disebut *norm* vektor jika untuk semua $x, y \in V$ berlaku,

(1) $\|x\| \geq 0$

(1a) $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$

(2) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ untuk semua $c \in F$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Selanjutnya, suatu ruang vektor yang dilengkapi dengan suatu norm disebut *ruang bernorm*.

Contoh:

Misalkan $V = R^n = \{ f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in R \}$ dan definisikan fungsi

$$\|\bullet\| : V \to R$$

dengan $\| f \| = \left(\sum_1^n \alpha_i^{\,2} \right)$. Dapat diperiksa bahwa $\|\bullet\|$ memenuhi sifat-sifat norm, dan norm ini dikenal sebagai norm Euclid. Lebih lanjut, besaran $\| f \|$ dapat dimaknai sebagai panjang vektor *f*.

Selanjutnya kita akan melihat konsep kekonvergenan barisan di ruang bernorm serta sifat-sifat yang terkait dengan kekonvergenan ini.

Definisi

Misalkan V suatu ruang bernorm dengan norm $\|\bullet\|$.

Barisan vektor $\{x^{(k)}\}$ di V dikatakan konvergen ke x di V terhadap norm $\|\bullet\|$ jika memenuhi $\|x^{(k)} - x\| \to 0 \quad, k \to \infty$.

Jika dalam suatu ruang bernorm V berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di V adalah konvergen, maka V dikatakan sebagai *ruang bernorm lengkap* atau *ruang Banach*.

Tentu saja dalam suatu ruang vektor kita dapat mendefinisikan beberapa norm yang berbeda. Namun dalam ruang vektor berdimensi hingga berlaku sifat bahwa semua norm adalah ekuivalen yang dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema (Ekuivalensi Norm)

Misalkan $\|x\|_\alpha$ dan $\|x\|_\beta$ masing-masing adalah norm di ruang berdimensi hingga V.

Maka terdapat konstanta C_m dan C_n sehingga berlaku

$$C_m \|x\|_\beta \leq \|x\|_\alpha \leq C_n \|x\|_\beta$$

Konsekuensi penting dari teorema ini adalah bahwa setiap barisan Cauchy di ruang berdimensi hingga adalah konvergen. Dengan demikian kita peroleh suatu fakta bahwa *ruang bernorm berdimensi hingga adalah suatu ruang Banach*.

Berikut ini adalah contoh-contoh ruang Banach serta norm masing-masing.

a. $R^n = \{ f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_i \in R \}$ dengan $\|f\| = \left(\sum_1^n \alpha_i^{\,2} \right)$

b. $\ell_\infty = \left\{ f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \mid \sup_i |\alpha_i| < \infty \right\}$ dengan $\|f\| = \sup_i |\alpha_i|$

c. $\ell_2 = \left\{ f = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots) \mid \sum_1^\infty \alpha_i^{\,2} < \infty \right\}$ dengan $\|f\| = \left(\sum_1^\infty \alpha_i^{\,2} \right)$

d. $B = B[a,b] = \{ f : [a,b] \to R \mid f \quad terbatas \}$ dengan $\|f\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

Dualitas

Pada bagian ini kita akan membicarakan suatu teorema penting di ruang Hilbert, yaitu teorema representasi Riesz. Berikutnya akan dikupas mengenai eksistensi fungsional linear di ruang Banach, melalui teorema Hahn-Banch serta beberapa konsekuensinya.

Suatu fungsi yang mengaitkan setiap vektor x di ruang vektor V dengan suatu bilangan real disebut *fungsional*. Jika fungsi ini bersifat linear maka disebut *fungsional linear*. Dalam sebarang ruang vektor, norm yang didefinisikan adalah suatu fungsional.

Teorema [Representasi Riesz]

Untuk setiap fungsional linear dan terbatas F di ruang Hilbert H terdapat unsur tunggal $y \in H$ sehingga berlaku

$$F(x) = \langle x, y \rangle, \quad \forall\ x \in H\ .$$

Lebih dari itu, juga berlaku

$$\|y\| = \sup_{x \in H, x \neq o} \frac{|F(x)|}{\|x\|}$$

Secara sederhana teorema ini mengatakan bahwa tidak ada fungsional linear terbatas di ruang Hilbert kecuali berupa perkalian dalam.

Teorema[Proyeksi]

Misalkan N suatu subruang tutup di ruang Hilbert H. Maka untuk setiap $x \in H$ terdapat $v \in N$ dan w yang orthogonal terhadap N sehingga berlaku

$$x = v + w$$

dan penulisan ini tunggal.

Konsekuensi penting dari teorema terakhir ini adalah hasil berikut.

Akibat

Jika N suatu subruang tutup di ruang Hilbert H tetapi $N \neq H$, maka terdapat unsur $y \neq o$ di H yang orthogonal terhadap N.

Dengan demikian kita telah membuktikan teorema Riesz.

Definisi:

Misalkan V suatu ruang vektor. Suatu fungsional $p(x)$ di V dikatakan sublinear jika berlaku

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad \forall x, y \in V$$
$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \quad x \in V, \alpha > o$$

Jelas bahwa suatu norm di ruang bernorm V adalah suatu fungsional yang sublinear.

Dan berikut ini adalah teorema Hahn-Banach.

Teorema [Hahn-Banach]

Misalkan V suatu ruang vektor dan $p(x)$ suatu fungsional sublinear di V. Misalkan pula M suatu subruang di V dan $f(x)$ suatu fungsional linear di M yang memenuhi

$$f(x) \leq p(x), \quad x \in M \; .$$

Maka terdapat fungsional linear F pada seluruh V sehingga berlaku

$$F(x) = f(x), \quad x \in M$$
$$F(x) \leq p(x), \quad x \in V$$

Salah satu akibat dari teorema ini adalah hasil berikut ini.

Teorema

Misalkan M suatu subruang di ruang bernorm X dan asumsikan f suatu fungsional linear terbatas di M. Selanjutnya tulis

$$\|f\| = \sup_{x \in M, x \neq o} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

Maka terdapat fungsional linear terbatas F pada seluruh X sehingga berlaku

$$F(x) = f(x), \quad x \in M$$
$$\|F\| = \|f\|$$

Teorema ini dapat dibuktikan dengan menerapkan teorema Hahn-Banach di atas serta mendefinisikan fungsional sublinear

$$p(x) = \|f\|\,\|x\|, \quad x \in X \ .$$

Beberapa konsekuensi penting dari teorema Hahn-Banach adalah sebagai berikut.

Teorema

Misalkan *X* suatu ruang bernorm dan $x \neq 0 \in X$. Maka terdapat suatu fungsional linear terbatas F pada seluruh X yang memenuhi

$$\|F\| = 1, \quad F(x) = \|x\|$$

Bukti:

Teorema

Jika *X* suatu ruang bernorm maka *X'* adalah ruang Banach.

Dengan demikian walaupun *X* bukan ruang Banach, *X'* senantiasa ruang Banach.

Jika *X* suatu ruang bernorm maka *X'* disebut ruang *dua*l dari *X*. Pada pembahasan sebelumnya, jika *H* suatu ruang Hilbert maka $f \in H'$ dapat direpresentasikan melalui

$$f(x) = \langle x, y \rangle, \quad x \in H \ .$$

Korespondensi $f \leftrightarrow y$ bersifat satu-satu dan memenuhi hubungan $\|f\| = \|y\|$. Oleh karena itu kita dapat mengidentifikasi *H'* dengan *H* sendiri.

Selanjutnya, perhatikan ruang barisan $\ell_p = \left\{ x = (\alpha_i, \ldots, \alpha_n, \ldots) \mid \sum_i^\infty \alpha_i^{\mathrm{p}} < \infty \right\}$

dengan $1 \leq p < \infty$. Kemudian definisikan

$$\|x\|_p = \left(\sum_i^{\infty} \alpha_i^{\,2} \right)^{1/p}.$$

Dapat ditunjukkan bahwa terhadap $\|\bullet\|_p$, ruang ℓ_p membentuk ruang bernorm. Terkait dengan ruang ℓ_p ini, kita mempunyai teorema penting berikut

Lebih lanjut, untuk setiap $F \in (L^p)'$ terdapat $y \in L^q$ sehingga berlaku

$$F(x) = \int_a^b x(y)y(t)dt, \quad x \in L^p$$

dan

$$\|F\| = \|y\|_q .$$

Operator Linear

Misalkan X dan Y masing-masing adalah ruang bernorm. Suatu pemetaan A yang mengaitkan setiap unsur di domain $D(A) \subseteq X$ dengan unsur tunggal $y \in Y$ disebut operator. Suatu operator A dikatakan linear jika memenuhi

a. $D(A) \subseteq X$ suatu subruang

b. $A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v), \quad \text{untuk semua skalar } \alpha, \beta$ dan $u, v \in D(A)$

Pada pembahasan selanjutnya kita mengasumsikan $D(A) = X$.

Suatu operator A dikatakan terbatas jika terdapat suatu konstanta M sehingga berlaku

$$\|Ax\| \leq M \ \|x\|, \quad x \in X$$

Dan norm operator tersebut didefinisikan sebagai

$$\|A\| = \sup_{x \neq o} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad (*)$$

yang tidak lain merupakan bilangan M terkecil yang memenuhi $\|Ax\| \leq M \ \|x\|, \quad x \in X$.

Berikut ini adalah salah satu sifat penting dari operator linear.

Teorema

Jika A adalah suatu operator linear yang kontinu di suatu titik $x \in X$, maka A terbatas dan kontinu di setiap titik.

Misalkan $B(X, Y)$ menyatakan himpunan semua operator linear terbatas dari X ke Y. Dapat diperiksa bahwa $B(X, Y)$ adalah suatu ruang Banach terhadap norm $(*)$.

Pada Bab sebelumnya telah diketahui sutau fakta bahwa himpunan fungsional terbatas X' adalah suatu ruang Banach. Sebagai bentuk perumuman dari teorema ini kita mempunyai sifat berikut.

Teorema

Jika Y suatu ruang Banach maka $B(X,Y)$ juga ruang Banach.

Dengan menggunakan Lema ini kita dapat memperoleh hasil utama berikut.

Teorema

Suatu syarat perlu dan cukup agar

$$R(A) \subset {}^{\circ}N(A')$$

adalah bahwa $R(A)$ tutup di *Y*.

Operator Invers

Misalkan *X* dan *Y* masing-masing adalah ruang bernorm dan $A \in B(X,Y)$. Pandang persamaan

$$Ax = y \qquad (\bullet)$$

Jika $R(A) = Y$ dan $N(A) = \{0\}$ maka kita dapat mengaitkan setiap $y \in Y$ dengan solusi tunggal persamaan $(\bullet)$. Dengan demikian, secara formal kita dapat mendefinisikan operator baru dari *Y* ke *X* yang disebut dengan *operator invers* dari *A* dan dinotasikan dengan A^{-1}. Terkait dengan operator invers ini kita mempunyai sifat penting berikut.

Teorema [Invers Terbatas]

Jika *X* dan *Y* masing-masing adalah ruang Banach dan $A \in B(X,Y)$ dengan $R(A) = Y$, $N(A) = \{0\}$, maka $A^{-1} \in B(Y,X)$.

Kita akan mempelajari sifat-sifat berikutnya dari operator linear di ruang Banach, untuk itu kita melangkah ke definisi berikut.

Definisi

Misalkan *X* dan *Y* masing-masing adalah ruang bernorm dan *A* adalah operator linear dari *X* ke *Y*. Operator A dikatakan *tutup* jika untuk sebarang barisan $(x_n) \subset D(A)$ yang memenuhi

$$x_n \to x \quad di X, \quad Ax_n \to y \quad di Y$$

maka $x \in D(A)$ dan $Ax = y$.

Beberapa fakta terkait dengan operator tutup ini adalah bahwa semua operator di $B(X,Y)$ adalah tutup dan jika *A* operator tutup maka $N(A)$ suatu subruang tutup di *X*. Sifat penting berikutnya mengenai operator tutup diberikan oleh teorema berikut.

Teorema

Misalkan *X* suatu ruang Banach dan *Y* ruang bernorm. Misalkan pula *W* sebarang subhimpunan di $B(X,Y)$ sehingga untuk setiap $x \in X$, berlaku

$$\sup_{A \in W} \|Ax\| < \infty .$$

Maka terdapat konstanta *M* berhingga yang memenuhi $\|A\| \leq M, \quad A \in W$.

Teorema Pemetaan Buka

Konsekuensi penting dari teorema-teorema sebelumnya adalah teorema berikut.

Teorema

Misalkan *A* suatu operator tutup dari ruang Banach *X* ke ruang Banach *Y* dan $R(A) = Y$. Jika *Q* sebarang himpunan buka di $D(A)$ maka $A(Q)$ juga buka di *Y*.

OPERATOR KOMPAK

Suatu subhimpunan *W* di ruang bernorm dikatakan terbatas jika terdapat bilangan *b* sehingga berlaku $\|x\| \leq b$ untuk semua $x \in W$. *W* ini dikatakan *kompak* jika untuk sebarang barisan $(x_n) \subset W$, terdapat subbarisan yang konvergen ke suatu unsur di *W*. Dalam lingkup ruang berdimensi hingga kita mempunyai sifat berikut.