Ruang Norm

Sumanang Muhtar Gozali

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

Definisi. *Misalkan X suatu ruang vektor atas R. Norm pada X didefinisikan sebagai fungsi $\|.\|: X \to R$ yang memenuhi*

N1. $\|x\| \geq 0$

N2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \; \forall\, x \in X, \alpha \in R$

N4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \; \forall\, x, y \in X$

Kita dapat memandang fungsi norm ini sebagai perumuman dari konsep nilai mutlak di sistem bilangan real. Nilai $\|x\|$ dapat kita pandang sebagai panjang vektor x atau sebagai jarak antara vektor x dengan vektor nol.

Dari sifat N4 kita dapat memperoleh ketaksamaan

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \qquad N5.$$

Bukti. Perhatikan ketaksamaan

$$\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

$$\|y\| \leq \|x - y\| + \|x\|$$

Ketaksamaan N5 ini berimplikasi pada kekontinuan norm, yaitu

Sifat. *Pemetaan $x \mapsto \|x\|$ bersifat kontinu* .

Bukti. Misalkan $\varepsilon > 0$, sebarang. Perhatikan bahwa berlaku

$$\|x - y\| < \delta = \varepsilon \;\; \Rightarrow \;\; |\|x\| - \|y\|| < \varepsilon$$

Contoh.

1. Misalkan $X = R^n$, definisikan,

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. $X = \ell^p, 1 < p < \infty$, definisikan,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

3. $X = \ell^\infty$, definisikan,

$$\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|.$$

4. $X = C[a,b]$, definisikan,

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$$

5. $X = L^2[a,b]$, definisikan

$$\|x\| = \left(\int_a^b x(t)^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Kekonvergenan & Kelengkapan

Definisi. *Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm.*

1. *Barisan (x_n) di X dikatakan konvergen jika terdapat $x \in X$ sehingga*
$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0.$$
2. *Barisan (x_n) di X dikatakan Cauchy jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga untuk semua $m, n > N$ berlaku*
$$\|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

Jika setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen maka X dikatakan lengkap. Ruang-ruang R^n, ℓ^∞, ℓ^p masing-masing adalah *lengkap*.

Sifat-sifat Ruang Norm

Teorema. *Suatu subruang Y dari ruang Banach X adalah lengkap jika dan hanya jika Y tutup di X.*
Bukti.

(⇒) Misalkan Y suatu subruang lengkap di ruang Banach X, dan (x_n) suatu barisan di Y yang konvergen ke suatu elemen x. Jelas bahwa (x_n) suatu barisan Cauchy, karena Y lengkap maka haruslah $x \in Y$. Jadi Y tutup.

(⇐) Misalkan (x_n) suatu barisan Cauchy di Y. Karena X lengkap maka (x_n) konvergen ke suatu elemen $x \in X$. Karena Y tutup maka haruslah $x \in Y$.

Kekonvergenan Deret.

Misalkan (x_n) suatu barisan di ruang norm X. Kita mendefinisikan barisan jumlah-jumlah parsial (s_n) sebagai

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n$$

Jika $(s_n) \to s$, yaitu bahwa $\|s_n - s\| \to 0$ maka kita katakan bahwa deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_1 + x_2 + \cdots$$

konvergen. Jika $\|x_1\| + \|x_2\| + \cdots$ konvergen, maka deret semula dikatakan konvergen mutlak. Lebih lanjut, kita mempunyai sifat berikut.

Sifat. *Di ruang norm X berlaku bahwa kekonvergenan absolut berimplikasi konvergen jika dan hanya jika X lengkap.*

Bukti. (⇐)

Misalkan $s_k = \sum_{n=1}^{k} x_n$ menyatakan jumlah parsial. Karena $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ konvergen, maka untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan bulat p sehingga $\sum_{n=p}^{\infty}\|x_n\| \le \varepsilon$. Selanjutnya, untuk semua $k \ge p$ dan semua bilangan bulat positif i, berlaku

$$\|s_{k+i} - s_k\| = \|x_{k+1} + x_{k+2} + \cdots + x_{k+i}\| \le \|x_{k+1}\| + \|x_{k+2}\| + \cdots + \|x_{k+i}\| \le \varepsilon.$$

Ini artinya, (s_n) suatu barisan Cauchy di ruang Banach X, sehingga konvergen ke suatu unsur $s \in X$. Akibatnya, deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen ke $s \in X$.

Lebih lanjut, karena $\|s_k\| \le \sum_{n=1}^{k}\|x_n\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ maka untuk $k \to \infty$ berlaku

$$\|s\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right\| \le \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|.$$

(⇒)???

Definisi. *Misalkan* $(X, \|.\|)$ *suatu ruang norm. Barisan* (e_n) *disebut basis Schauder untuk* X *jika untuk setiap* $x \in X$ *terdapat barisan skalar* (α_n) *yang tunggal sehingga berlaku*

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0$$

Teorema. *Misalkan* $(X, \|.\|)$ *suatu ruang norm. Maka terdapat ruang Banach* $\hat{X}$ *dan suatu isometric A dari X ke subruang W yang padat di* $\hat{X}$. *Ruang* $\hat{X}$ *ini tunggal kecuali terhadap isometric.*

Ruang Norm Berdimensi Hingga

Lema. *Misalkan* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *adalah himpunan bebas linier di ruang norm* $(X, \|.\|)$. *Maka terdapat scalar* $c > 0$ *sehingga untuk sebarang scalar* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ *berlaku.*

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Teorema. *Setiap ruang norm berdimensi hingga adalah lengkap*

Bukti: Misalkan (x_m) suatu barisan Cauchy di ruang norm X yang berdimensi hingga, dan $\{e_1, \dots, e_n\}$ adalah basis untuk X. Setiap x_m mempunyai representasi tunggal

$$x_m = \alpha_1^m e_1 + \cdots + \alpha_n^m e_n.$$

Karena (x_m) suatu barisan Cauchy maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat N sehingga untuk semua $m, r > N$ berlaku

$$\varepsilon > \|x_m - x_r\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^m - \alpha_j^r) e_j\right\| \geq c \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^m - \alpha_j^r|.$$

Jika kita bagi dengan c maka kita peroleh

$$|\alpha_j^m - \alpha_j^r| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^m - \alpha_j^r| \leq \frac{\varepsilon}{c}.$$

Hasil ini mengatakan bahwa $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \dots)$ suatu barisan Cauchy, untuk setiap $j = 1, \dots, n$.

Oleh karena itu, $(\alpha_j^1, \alpha_j^2, \dots)$ konvergen ke suatu elemen α_j. Definisikan

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Jelas bahwa $x \in X$, dan berlaku

$$\|x_m - x\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^m - \alpha_j) e_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^m - \alpha_j| \, \|e_j\|.$$

Karena $\alpha_j^m \to \alpha_j$ maka kita peroleh $(x_m) \to x$.

Teorema. *Setiap subruang berdimensi hingga Y (dari ruang norm) adalah tutup.*

Bukti: Misalkan (y_m) suatu barisan di Y yang konvergen ke suatu elemen y. Karena (y_m) Cauchy dan Y lengkap maka haruslah $y \in Y$.

Definisi. *Misalkan $(X, \|.\|)$ suatu ruang norm. Norm $\|.\|$ dikatakan ekuivalen dengan $\|.\|^*$ jika terdapat bilangan-bilangan positif a, b sehingga untuk semua $x \in X$ berlaku*

$$a\|x\|^* \leq \|x\| \leq b\|x\|^*$$

Teorema. *Di ruang norm berdimensi hingga sebarang dua norm adalah ekuivalen.*

Bukti: Misalkan $\dim X = n$, dan $\{e_1, \dots, e_n\}$ suatu basis untuk X. Untuk setiap $x \in X$, mempunyai representasi tunggal

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

Berdasarkan lema, terdapat bilangan positif c sehingga

$$\|x\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|).$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga, kita peroleh

$$\|x\|_0 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \, \|e_j\|_0 \leq k \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|,$$

Dengan $k = \max_j \|e_j\|_0$. Oleh karena itu kita dapatkan $\frac{c}{k}\|x\|_0 \leq \|x\|$. Dengan cara yang sama, kita dapat memperoleh b sehingga $\|x\| \leq b\|x\|_0$.