Kumpulan Soal Aljabar Linear

Sumanang Muhtar Gozali

1 SPL dan Matriks

1. Carilah solusi dari SPL

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned} .$$

2. Carilah solusi dari SPL

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned} .$$

3. Carilah solusi dari SPL

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned} .$$

4. Perlihatkan bahwa untuk sebarang $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$, SPL berikut senantiasa mempunyai solusi

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + x_4 &= 0 \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} .$$

5. Carilah hubungan a, b, c sehingga SPL berikut mempunyai solusi

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= a \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= b \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= c \end{aligned} .$$

6. Tentukan syarat k sehingga SPL berikut mempunyai solusi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 &= k \end{aligned} .$$

7. Misalkan X_1 dan X_2 masing-masing adalah solusi SPL homogen $AX = 0$. Buktikan bahwa untuk sebarang $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha X_1 + \beta X_2$ juga merupakan solusi SPL di atas.

8. Carilah solusi dari SPL

$$\begin{array}{ll} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 & = 1 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 & = 2 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 & = -2 \end{array}.$$

9. Carilah solusi dari SPL

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 & = 3 \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 & = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 & = -4 \end{array}.$$

10. Carilah invers dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

11. Misalkan A suatu matriks berukuran $m \times n$. Tunjukkan bahwa terdapat matriks tak nol B berukuran $n \times n$ sehingga $AB = 0$ **jika dan hanya jika** $rank(A) < n$.

12. Suatu matriks U disebut *skew-symmetric* jika $U = -U^t$. Tunjukkan bahwa setiap matriks kuadrat real A dapat dituliskan secara tunggal dalam bentuk $A = S + U$ dimana S symmetric dan U skew-symmetric.

13. Tunjukkan bahwa matriks segitiga $A = (a_{ij})$ mempunyai invers jika dan hanya jika $a_{ii} \neq 0$ untuk semua i.

14. Misalkan A suatu matriks berukuran $n \times n$ sehingga terdapat $k > 0$ dan $A^k = 0$. Tunjukkan bahwa

    a. A tidak mempunyai invers

    b. $(I_n - A)$ mempunyai invers dengan memeriksa bahwa $(I_n + A + A^2 + ... + A^{k+1})$ merupakan inversnya

    c. Jika berlaku $AB = BA$ maka $I_n + AB$ mempunyai invers.

15. Suatu matriks A berukuran $n \times n$ disebut *idempoten* jika berlaku $A^2 = A$. Tunjukkan bahwa jika A idempoten dan nonsingular maka $A = I_n$.

2 Kerjakan soal-soal berikut:

1. Misalkan V suatu ruang vektor real berdimensi n. Buktikan bahwa V isomorfik dengan $\mathbf{R}^n$.

2. Misalkan $x = (1, 0, 0)$ dan bidang $W = \{(a, b, c) \mid a - 2b + 3c = 0\}$. Carilah y dan z sehinnga $x = y + z$ dan $y \perp W$.

3. Diketahui bahwa subruang U direntang oleh $K = \{(1, -1, -1),\ (2, 1, -1),\ (1, 2, 0)\}$. Carilah u dan v sehingga $U = span\{u, v\}$ dan $u, v \notin K$.

4. Carilah matriks yang mendiagonalkan
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Diketahui SPL homogen dengan bentuk umum $AX = 0$ dan A suatu matriks berukuran $m \times n$. Buktikan bahwa himpunan semua solusi SPL di atas membentuk subruang di $\mathbf{R}^n$.

6. Buktikan bahwa proyeksi $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ pada bidang $W = span\{u, v\}$ suatu transformasi linear.

7. Carilah matriks proyeksi $P : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ pada bidang $W = span\{(1, 0, -1)\}$.

8. Diketahui $W = span\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$. Carilah basis untuk $W^\perp$. (Terhadap hasil kali titik)

9. Asumsikan $V = V_1 \bigoplus V_2$, dan V_1, V_2, W semuanya ruang vektor berdimensi hingga atas $\mathbf{R}$. $Hom(V, W)$ menyatakan semua transformasi linear dari V ke W. Buktikan bahwa $Hom(V, W)$ isomorfik terhadap $Hom(V_1, W) \bigoplus Hom(V_2, W)$.

10. Misalkan $T : V \to V$ suatu proyeksi ortogonal yang onto pada suatu subruang dari V. Buktikan bahwa $\|T(v)\| \leq \|v\|$ untuk setiap $v \in V$.

11. Carilah jarak antara titik $(1, 1, 1, 0)$ dengan subruang $V = span\{(2, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0)\}$.

12. Jika $\{u_1, ..., u_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam $(V, \langle ., . \rangle)$, tunjukkan bahwa untuk setiap $v \in V$ berlaku
$$\|v\|^2 = \langle v, u_1 \rangle^2 + ... + \langle v, u_n \rangle^2.$$

13. Diketahui $(V, \langle ., . \rangle)$ suatu ruang hasil kali dalam. Jika $T : V \to V$ suatu transformasi linear dan untuk semua $w \in V$ berlaku $\langle T(v), w \rangle = 0$, tunjukkan bahwa $T = 0$.

14. Misalkan $\langle ., . \rangle$ suatu hasil kali dalam di $\mathbf{R}^n$ dan A suatu matriks invertible berukuran $n \times n$. Buktikan bahwa

$$\langle u, v \rangle' = \langle Au, Av \rangle$$

juga suatu hasil kali dalam di $\mathbf{R}^n$.

15. Diketahui $(V, \langle ., . \rangle)$ suatu ruang hasil kali dalam berdimensi hingga. Jika $T : V \to V$ suatu transformasi linear dan untuk semua $v \in V$ berlaku $\|T(v)\| = \|v\|$, tunjukkan bahwa T suatu isomorfisma.

16. Perhatikan ruang vektor matriks $M_{n\times n}$. Definisikan

$$\langle A, B \rangle = tr(AB^t)$$

untuk setiap $A, B \in M_{n\times n}$. Buktikan bahwa definisi di atas suatu hasil kali dalam di $M_{n\times n}$.

17. Diketahui matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Carilah semua bilangan real z sehingga $\det(zI - A) = 0$.

18. Diketahui A suatu matriks berukuran $n \times n$ dengan n buah nilai eigen berbeda, dan B matriks lain yang memenuhi $AB = BA$. Tunjukkan bahwa B dapat didiagonalkan.

19. Misalkan V berdimensi n dan $T : V \to V$ suatu transformasi linear. Jika $\ker(T)$ berdimensi $(n - 1)$ dan T mempunyai sebuah nilai eigen tak nol, tunjukkan bahwa T dapat didiagonalkan.

20. Jika matriks A dapat didiagonalkan, periksa apakah A^n juga dapat didiagonalkan?

21. Buktikan bahwa sebarang matriks segitiga atas dengan entri-entri diagonal semuanya berbeda, dapat didiagonalkan.

22. Tanpa perlu mencari vektor-vektor eigen, periksa apakah matriks-matriks berikut dapat didiagonalkan

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$