TEORI GRUP

SUMANANG MUHTAR GOZALI

KBK ALJABAR & ANALISIS

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

BANDUNG

2010

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Segala puji bagi Allah Rabb semesta alam. Shalawat serta salam bagi Rasulullah Muhammad *shallallahu alaihi wasallam*. Tulisan ini memuat ringkasan penting materi kuliah Struktur Aljabar 1. Topik utama buku ini adalah teori grup. Uraian dibuat seringkas mungkin dan diharapkan mudah dicerna oleh para mahasiawa. Terakhir, Penulis berharap semoga tulisan ini bermanfaat, khususnya bagi para pembaca yang berminat dalam bidang aljabar.

Bandung, Maret 2010

Penulis,

Sumanang Muhtar Gozali

DAFTAR ISI

BAB 1

Grup

Pada bab 1 ini kita akan mempelajari definisi dan contoh-contoh grup. Pembahasan disambung dengan definisi subgrup serta kriteria dasar subgrup. Selain itu akan dibahas pula grup permutasi dan grup siklis. Beberapa teorema penting perihal sifat-sifat grup akan dikemukakan secara lugas dan diperkaya dengan ilustrasi contoh.

1.1 Pendahuluan

Perhatikan himpunan bilangan bulat $\mathbf{Z}$. Untuk sebarang dua bilangan bulat penjumlahan keduanya juga ada di $\mathbf{Z}$. Untuk hal ini kita mengatakan $\mathbf{Z}$ tertutup terhadap penjumlahan $(+)$. Tidak hanya itu kita juga mempunyai fakta bahwa untuk semua $x, y, z \in \mathbf{Z}$ berlaku sifat-sifat:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
2. Terdapat $0 \in \mathbf{Z}$ sehingga $x + 0 = x = 0 + x$.
3. Terdapat $-x \in \mathbf{Z}$ sehingga $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

Kita melihat bahwa jika penjumlahan ini diterapkan pada himpunan bilangan bulat nonnegatif saja maka sifat yang ketiga tidaklah terpenuhi. Dari pengamatan ini kita bisa mengatakan bahwa $\mathbf{Z}$ mempunyai struktur yang menarik dan penting. Oleh karena itu, kita terdorong untuk memperumum struktur yang kita temui pada himpunan bilangan bulat di atas.

Sekarang, perhatikan himpunan tak kosong G. Operasi biner pada G adalah suatu pemetaan $\circ : G \times G \to G$. Himpunan G disebut *grup* terhadap operasi $\circ$, dinotasikan $(G, \circ)$, jika untuk semua $a, b, c \in G$ berlaku semua sifat berikut:

1. **Sifat ketertutupan**: $a \circ b \in G$.
2. **Sifat asosiatif**: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.
3. **Eksistensi elemen identitas**: Terdapat $e \in G$ sehingga $a \circ e = e \circ a = a$. Selanjutnya e disebut elemen *identitas* di G.
4. **Eksistensi elemen invers**: Terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. Dalam hal ini a^{-1} disebut *invers* dari a.

Lebih lanjut, jika untuk semua $a, b \in G$ berlaku $a \circ b = b \circ a$ maka $(G, \circ)$ disebut grup *komutatif* atau grup *abelian*.

Contoh. $(\mathbf{Z}, +)$ adalah suatu grup. Tidak hanya itu, $(\mathbf{Z}, +)$ bahkan suatu grup komutatif karena untuk sebarang $x, y \in \mathbf{Z}$ berlaku $x + y = y + x$.

Contoh. Perhatikan himpunan $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Jelas bahwa $(\mathbf{R}^*, \times)$ suatu grup komutatif, dimana $\times$ adalah perkalian biasa di bilangan real.

Contoh. Perhatikan himpunan fungsi linear

$$L = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) = ax + b,\ a \neq 0\}.$$

Kita akan memeriksa apakah L suatu grup terhadap operasi komposisi.

Misalkan $f = ax + b,\ g = cx + d,\ h = ex + f$ dengan a, c, e semuanya tidak nol.

i. Jelas bahwa $f \circ g = (ac)x + (ad + b) \in L$.

ii. Perhatikan bahwa kita mempunyai,

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ h &= (ac)h + (ad + b) \\ &= (ace)x + (acf + ad + b) \end{aligned}.$$

Sementara itu $g \circ h = (ce)x + (cf + d)$, sehingga

$$\begin{aligned} f \circ (g \circ h) &= a(cex + cf + d) + b \\ &= (ace)x + (acf + ad + b) \end{aligned}.$$

Dengan demikian operasi komposisi bersifat asosiatif.

iii. Perhatikan $i = x \in L$, kita mempunyai $f \circ i = f = i \circ f$. Jadi $i = x$ sebagai elemen identitas di L.

iv. Terakhir, perhatikan bahwa $f' = \frac{x-b}{a}$ memenuhi $f \circ f' = i = f' \circ f$.

Dengan demikian kita telah membuktikan bahwa $(L, \circ)$ suatu grup. Jika kita ambil $f = 2x+1$, $g = x-2$ kita dapatkan $f \circ g = 2x-3$ sementara $g \circ f = 2x-1$. Semua ini cukup bagi kita untuk mengatakan bahwa grup $(L, \circ)$ tidak komutatif.

Contoh. Perhatikan himpunan hingga $K = \{a, b, c\}$. Selanjutnya, kita definisikan

1. $a \circ a = a \quad a \circ b = b \quad a \circ c = c$
2. $b \circ a = b \quad b \circ b = c \quad b \circ c = a$
3. $c \circ a = c \quad c \circ b = a \quad c \circ c = b$

Dalam bentuk diagram kita mempunyai

o	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Jelas bahwa $(K, \circ)$ suatu grup dengan elemen identitas a.

Contoh. Perhatikan ruang matriks

$$M_2^* = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\}.$$

Dapat diperiksa bahwa $(M_2^*, \cdot)$ suatu grup dimana $(\cdot)$ adalah operasi perkalian matriks biasa.

Contoh. Perhatikan himpunan bilangan bulat $\mathbf{Z}$. Definisikan:

$$a \oplus b = a + b + 2, \quad \text{untuk setiap } a, b \in \mathbf{Z}.$$

Dapat diperiksa bahwa $(\mathbf{Z}, \oplus)$ suatu grup.

Orde grup

Misalkan $(G, \circ)$ suatu grup. Banyaknya seluruh elemen di G disebut *orde* dari G, dinotasikan $|G|$. Jika $|G| < \infty$ kita katakan G berorde hingga dan G disebut *grup hingga*. Jika tidak demikian maka kita katakan G berorde tak hingga dan G disebut *grup tak hingga*.

Dengan melihat contoh-contoh di atas kita dapat menyimpulkan bahwa $\mathbf{Z}$, $\mathbf{R}^*$, L, M_2^* semuanya adalah grup tak hingga, sementara K adalah grup hingga dengan orde $|K| = 3$.

Notasi pangkat

Misalkan $(G, \circ)$ suatu grup dan $a \in G$. Untuk sebarang bilangan asli n kita mendefinisikan

$$a^n = \underbrace{a \circ a \circ ... \circ a}_{sebanyak\ n\ suku}.$$

Jika G adalah grup terhadap penjumlahan maka kita mempunyai

$$a^n = \underbrace{a + a + ... + a}_{sebanyak\ n\ suku} = na.$$

Contoh. Perhatikan himpunan bilangan modulo $\mathbf{Z}_n = \{\bar{0}, \bar{1}, ..., \overline{n-1}\}$. Definisikan

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}, \quad \text{untuk setiap } \bar{a}, \bar{b} \in \mathbf{Z}_n.$$

Dapat diperiksa bhwa $(\mathbf{Z}_n, +)$ membentuk grup dengan elemen identitas $\bar{0}$. Selanjutnya perhatikan bahwa untuk setiap $\bar{a} \in \mathbf{Z}_n$ berlaku

$$(\bar{a})^n = n\bar{a} = \bar{0}.$$

Contoh. Perhatikan kembali grup $L = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \mid f(x) = ax + b,\ a \neq 0\}$ terhadap operasi komposisi. Misalkan $f = 2x + 1$, dengan mengacu pada komposisi fungsi kita mempunyai

$$f^3 = f \circ f \circ f = 8x + 7.$$

Sifat pembatalan

Sekarang, misalkan $(G, \circ)$ suatu grup. Asumsikan bahwa $a, b, c \in G$ dan memenuhi persamaan

$$a \circ b = a \circ c.$$

Perhatikan bahwa dengan 'mengalikan' kedua ruas persamaan dengan a^{-1} di sebelah kiri serta menggunakan sifat asosiatif maka kita peroleh

$$(a^{-1} \circ a) \circ b = (a^{-1} \circ a) \circ c \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Inilah yang kita sebut sebagai sifat *pembatalan kiri.* Dengan cara serupa kita dapat menunjukkan sifat *pembatalan kanan*, yaitu bahwa

$$b \circ a = c \circ a \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Hasil ini kita nyatakan dalam teorema berikut.

Teorema. Jika $(G, \circ)$ suatu grup dan $a, b, c \in G$ maka berlaku

i. $a \circ b = a \circ c \quad \Rightarrow \quad b = c$

ii. $b \circ a = c \circ a \quad \Rightarrow \quad b = c$

Ketunggalan elemen identitas dan invers

Kita mengakhiri bagian pendahuluan ini dengan sebuah teorema penting berikut.

Teorema. Jika $(G, \circ)$ suatu grup maka berlaku

i. Elemen identitas di G adalah tunggal

ii. Setiap elemen di G mempunyai invers tunggal

BUKTI (i) Asumsikan bahwa $e, f \in G$ dimana keduanya memenuhi

$$a \circ e = a = e \circ a \ \text{ dan } \ a \circ f = a = f \circ a,$$

untuk setiap $a \in G$. Berdasarkan hubungan pertama, $f \circ e = f = e \circ f$ dan berdasarkan hubungan kedua $e \circ f = e = f \circ e$. Oleh karena itu kita peroleh $e = f$, ini berarti elemen identitas di G adalah tunggal.

(ii) Ambil $a \in G$ sebarang. Asumsikan $b, c \in G$ dan memenuhi

$$a \circ b = e = b \circ a \ \text{ dan } \ a \circ c = e = c \circ a,$$

dimana e adalah elemen identitas di G. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} b &= b \circ e \\ &= b \circ (a \circ c) \\ &= (b \circ a) \circ c \\ &= e \circ c \\ &= c \end{aligned}$$

□

Latihan

1.

2.

3.

1.2 Subgrup

Kita sudah melihat beberapa contoh grup dengan elemen dan operasi yang bermacam-macam. Semua itu ditujukan untuk memberikan ilustrasi yang cukup lengkap perihal definisi grup serta kaitannya dengan himpunan serta operasi yang sudah kita kenal sebelumnya.

1.3 Grup Hingga

Sebelumnya sudah dijelaskan bahwa grup hingga adalah grup dengan banyaknya elemen yang berhingga. Perhatikan kembali contoh grup $K = \{a, b, c\}$ terhadap operasi $\circ$ sebagaimana terlihat pada ilustrasi di bawah ini

1. $a \circ a = a \quad a \circ b = b \quad a \circ c = c$
2. $b \circ a = b \quad b \circ b = c \quad b \circ c = a$
3. $c \circ a = c \quad c \circ b = a \quad c \circ c = b$

1.4 Grup Permutasi

Pada bagian ini kita akan melihat salah satu jenis grup yaitu grup permutasi. Perhatikan himpunan hingga $S = \{1, 2, 3\}$, kita akan mengidentifikasi semua pemetaan bijektif $\pi_i : S \to S$. Dalam hal ini kita hanya mempunyai enam buah pemetaan bijektif, yaitu:

1. $\pi_1 : \ 1 \to 1 \quad 2 \to 2 \quad 3 \to 3$
2. $\pi_2 : \ 1 \to 1 \quad 2 \to 3 \quad 3 \to 2$
3. $\pi_3 : \ 1 \to 2 \quad 2 \to 3 \quad 3 \to 1$
4. $\pi_4 : \ 1 \to 2 \quad 2 \to 1 \quad 3 \to 3$
5. $\pi_5 : \ 1 \to 3 \quad 2 \to 2 \quad 3 \to 1$
6. $\pi_6 : \ 1 \to 3 \quad 2 \to 1 \quad 3 \to 2$

Notasi siklik

Perhatikan himpunan $\{a, b, c, d\}$, kita menotasikan (a, b, c, d) untuk permutasi

$$a \to b \quad b \to c \quad c \to d \quad d \to a.$$

Bentuk (a, b, c, d) disebut notasi *siklik*. Jika ada elemen yang hilang pada notasi siklik maka kita artikan elemen itu dipetakan pada dirinya sendiri. Sebagai contoh, (a, b) berarti

$$a \to b \quad b \to a \quad c \to c \quad d \to d.$$

Untuk permutasi identitas

$$e : \ a \to a \quad b \to b \quad c \to c \quad d \to d,$$

kita dapat menggunakan salah satu elemen sebagai wakil. Jadi kita bisa menuliskan $e = (a) = (b) = (c) = (d)$.

Grup permutasi S_4

Latihan

1.

2.

3.

1.5 Grup Siklis

Sekarang kita akan membahas grup siklis. Untuk itu lihat kembali grup $(\mathbf{Z}_n, +)$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\bar{k} \in \mathbf{Z}_n$ kita dapat menuliskan

$$\bar{k} = \underbrace{\bar{1} + \bar{1} + ... + \bar{1}}_{sebanyak\ k\ suku}.$$

Dalam hal ini kita mengatakan $(\mathbf{Z}_n, +)$ dibangun oleh $\bar{1}$, atau bahwa $\bar{1}$ membangun $(\mathbf{Z}_n, +)$.

Dalam pengertian yang lebih umum, elemen $a \in (G, \circ)$ dikatakan membangun G jika untuk setiap $b \in G$ terdapat bilangan bulat k sehingga $a^k = b$. Dalam keadaan demikian kita akan menuliskan $G = \langle a \rangle$. Konsep ini kita rumuskan dalam definisi berikut.

Definisi. Grup $(G, \circ)$ dikatakan *siklis* jika terdapat $a \in G$ sehingga

$$G = \langle a \rangle = \{ \ a^k \mid k \in \mathbf{Z} \ \}.$$

Contoh. Perhatikan bahwa grup $C = \{1, -1, i, -i\}$ terhadap perkalian di bilangan kompleks dibangun oleh i dan $-i$. Kita lihat bahwa $i = (-i)^3$, $i^2 = -1 = (-i)^2$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1 = (-i)^4$. Jadi kita menotasikan $C = \langle i \rangle = \langle -i \rangle$.

Contoh. Tinjau kembali grup $(K = \{a, b, c\}, \circ)$ dengan operasi antar masing-masing elemen

o	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

Kita mendapati fakta bahwa $K = \langle b \rangle = \langle c \rangle$. **Latihan**

1.

2.

3.

BAB 2

Grup Faktor

Latihan

1.

2.

3.

BAB 3

Homomorfisma Grup

DAFTAR PUSTAKA

[1] Gallian, J.A. (1985), *Contemporary Abstract Algebra*, John Wiley & Sons. Inc.

[2] Durbin, Erwin. (1978), *Modern Algebra*, John Wiley & Sons. Inc.

[3] Herstein, W.R. (2000), *Topics in Algebra*, Prentice Hall.

[4] Adkins, William (1995), *Algebra via Module Theory*, Springer-Verlag New York, Inc.