

Teori Ruang Norm-2

Sumanang Muhtar Gozali
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

Seminar Nasional Matematika UNJ
10 Oktober 2009

Outline

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang ℓ^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

- 1 Pendahuluan
- 2 Ruang Hasil Kali Dalam-2
- 3 Ruang Norm-2 Berdimensi Hingga
- 4 Norm-2 di ruang ℓ^2
- 5 Ortogonalitas di Ruang Norm-2

Definition 1.1

Misalkan X adalah ruang vektor real dengan $\dim(X) \geq 2$. Suatu fungsi bernilai real $\|\cdot, \cdot\| : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ disebut *norm-2* di X jika memenuhi:

- (1) $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x, y bergantung linear.
- (2) $\|x, y\| = \|y, x\|$ untuk semua $x, y \in X$.
- (3) $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$.
- (4) $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$ untuk semua $x, y, z \in X$.

Pasangan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ disebut *ruang norm-2*.

Contoh (Norm-2 Baku)

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang ℓ^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Example 1.2

Misalkan $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ruang hasil kali dalam dengan dimensi $d \geq 2$. Perhatikan fungsi

$$\|x, y\|_b := \begin{vmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{vmatrix}.$$

Fungsi $\|.,.\|_b$ memenuhi semua kondisi norm-2, dan disebut norm-2 baku.

Contoh (Gähler)

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Example 1.3

Misalkan X suatu ruang vektor dengan $\dim(X) \geq 2$, dan X' menyatakan ruang dual. Gähler mengemukakan contoh norm-2 $\|.,.\|$ di X , yaitu

$$\|x, y\|^* := \sup_{\substack{f, g \in (X)' \\ \|f\|, \|g\| \leq 1}} \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}$$

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang ℓ^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Definition 2.1

Misalkan X suatu ruang vektor dengan dimensi paling kecil 2. Hasil kali dalam-2 adalah fungsi $\langle \cdot, \cdot | \cdot \rangle : X \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi semua sifat berikut

- 1 $\langle x, y | y \rangle \geq 0$ dan $\langle x, y | y \rangle = 0$ jika dan hanya jika x, y bergantung linier.
- 2 $\langle x, y | y \rangle = \langle y, x | x \rangle$
- 3 $\langle x, y | z \rangle = \langle x, z | y \rangle$
- 4 $\langle x, y | \alpha z \rangle = \alpha \langle x, y | z \rangle$
- 5 $\langle x, y | z + z' \rangle = \langle x, y | z \rangle + \langle x, y | z' \rangle$

Contoh (hasil kali dalam-2 baku)

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang ℓ^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Definition 2.2

Misalkan $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ruang hasil kali dalam dengan dimensi $d \geq 2$. Definisikan

$$\langle x, y|z \rangle := \begin{vmatrix} \langle x, y \rangle & \langle x, z \rangle \\ \langle z, y \rangle & \langle z, z \rangle \end{vmatrix}.$$

Dalam hal ini, $\|x, z\|_b := \langle x, x|z \rangle^{\frac{1}{2}}$ tidak lain merupakan norm-2 baku.

Barisan konvergen - Cauchy

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Pada sesi ini diasumsikan bahwa X ruang vektor berdimensi hingga.

Definition 3.1

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang norm-2. Barisan (x_n) di X dikatakan konvergen ke $x \in X$ jika

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x, y\| = 0 \text{ untuk semua } y \in X$$

Definition 3.2

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang norm-2. Barisan (x_n) di X dikatakan Cauchy jika

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m, y\| = 0 \text{ untuk semua } y \in X$$

Lema kekonvergenan

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang norm-2 dengan basis $B = \{u_1, \dots, u_d\}$. Berkaitan dengan hal ini kita mempunyai lema berikut

Lemma 3.3

Definition 3.4

Hasil Utama (1)

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Theorem 3.5

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Lemma 3.6

Di ruang norm berdimensi hingga semua norm adalah ekuivalen. Adakah sifat ekuivalensi ini di ruang norm-2 berdimensi hingga?

Norm-2 versi Gähler di ruang ℓ^2

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang ℓ^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Misalkan $X = \ell^2$ dan $x, y \in X$. Norm-2 versi Gähler di ruang ini berbentuk

$$\|x, y\|_2^* := \sup_{\substack{f, g \in \ell^2 \\ \|f\|, \|g\| \leq 1}} \begin{vmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{vmatrix}$$

$$\|x, y\|_2 := \left[\frac{1}{2} \sum_j \sum_k \left| \det \begin{pmatrix} x_j & x_k \\ y_j & y_k \end{pmatrix} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ortogonalitas Birkhof-James di ruang norm

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Definition 5.1

Misalkan $(X, \|\cdot\|)$ suatu ruang norm dan x, y adalah dua buah vektor di X .
Jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\|x\| \leq \|x + \alpha y\|,$$

maka x memenuhi ortogonalitas Birkhof-James terhadap y , dinotasikan $x \perp_{BJ} y$.

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas di Ruang Norm-2?

Definition 5.2

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang norm-2 dan x, y adalah dua buah vektor di X .
Jika untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in X$ berlaku

$$\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\|,$$

maka x dan y memenuhi $x \perp^{BJ} y$.

Catatan:

Definisi ini terlalu ketat sehingga tidak ada dua vektor yang ortogonal di ruang norm-2 baku.

Definition 5.3

Misalkan $(X, \|\cdot, \cdot\|)$ suatu ruang norm-2 dan x, y adalah dua buah vektor di X .
 $x \perp^{BJ} y \Leftrightarrow$ terdapat $V \subseteq X$ dengan $\text{codim}(V) = 1$ sehingga

$$\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\| \text{ untuk semua } \alpha \in \mathbb{R}, z \in V.$$

Ortogonalitas- b (versi Mazaheri)

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Definition 5.4

Misalkan X suatu ruang norm-2 dan $x, y \in X$. $x \perp^b y \Leftrightarrow$ terdapat $b \in X$ dengan $\|x, b\| \neq 0$ sehingga $\|x, b\| \leq \|x + \alpha y, b\|$ untuk semua $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2 Umum

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Theorem 5.5

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2 Baku

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdimensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Misalkan X dilengkapi dengan hasil kali dalam-2 dan norm-2 baku.

Fact 5.6

Ortogonalitas- b di Ruang Norm-2 Baku

Teori
Ruang
Norm-2

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2

Theorem 5.7

**Teori
Ruang
Norm-2**

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

**Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2**

**Teori
Ruang
Norm-2**

S.M.
Gozali &
H.
Gunawan

Pendahuluan

Ruang
Hasil Kali
Dalam-2

Ruang
Norm-2
Berdi-
mensi
Hingga

Norm-2 di
ruang l^2

**Ortogonalitas
di Ruang
Norm-2**

Terima Kasih