KOMPUTASI DAN DINAMIKA FLUIDA

TUGAS 1

Oleh

RIRIN SISPIYATI
NIM : 20106003
Program Studi Matematika

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
2009

Exercise 40

Take as initial spectrum a block function (nonzero for ½ ≤ k ≤ 2). Animate the initial profile and the evolution. (Approximate the Fourier integral by a Riemann sum)

Penyelesaian:

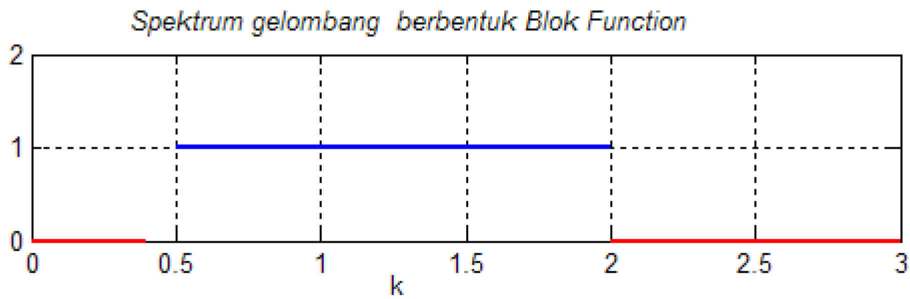
Diketahui persamaan umum gelombang :

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)} \qquad \text{….(1)}$$

dimana k adalah bilangan gelombang, dan ω adalah frekuensi gelombang.

Misalkan spektrum dari gelombang adalah sebuah fungsi blok, yaitu :

$$F(k) = 1 \quad , \tfrac{1}{2} \le k \le 2$$
$$= 0 \quad , \text{yang lainnya}$$



Maka profil gelombang $u(x,t)$ dapat diperoleh :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i(kx-\omega t)}dk + \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-i(kx-\omega t)}dk$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\cos(kx-\omega t)dk$$

1. Menggunakan model persamaan

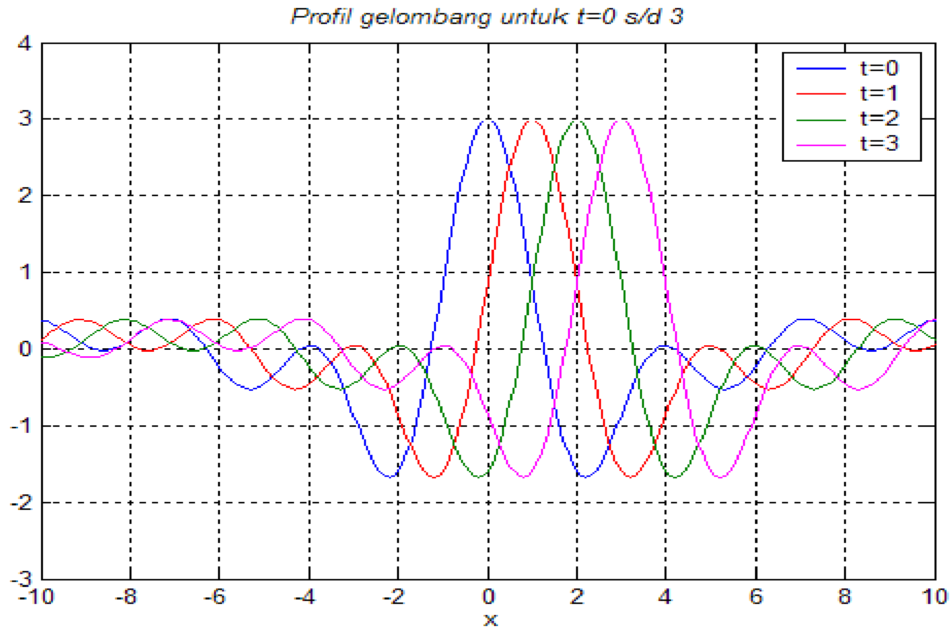
$$\partial_t u + c\partial_x u = 0 \qquad \text{……(2)}$$

dengan mensubstitusi (1) ke (2) diperoleh relasi : $\omega = ck$ (relasi translasi), sehingga diperoleh bentuk profil gelombang :

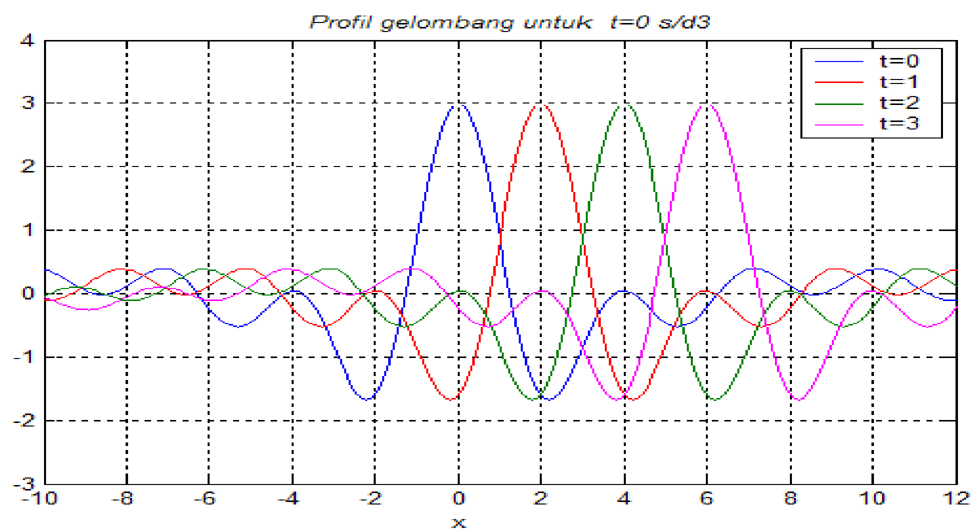
$$u(x,t) = 2\int_{0.5}^{2} \cos k(x-ct)dk \quad = \frac{2}{x\text{-}ct}\sin k(x-ct)\Big|_{0.5}^{2}$$

$$= \frac{2}{x\text{-}ct}\left(\sin 2(x-ct) - \sin 0.5(x-ct)\right)$$

Untuk $c = 1$, diperoleh profil gelombang sebagai berikut :

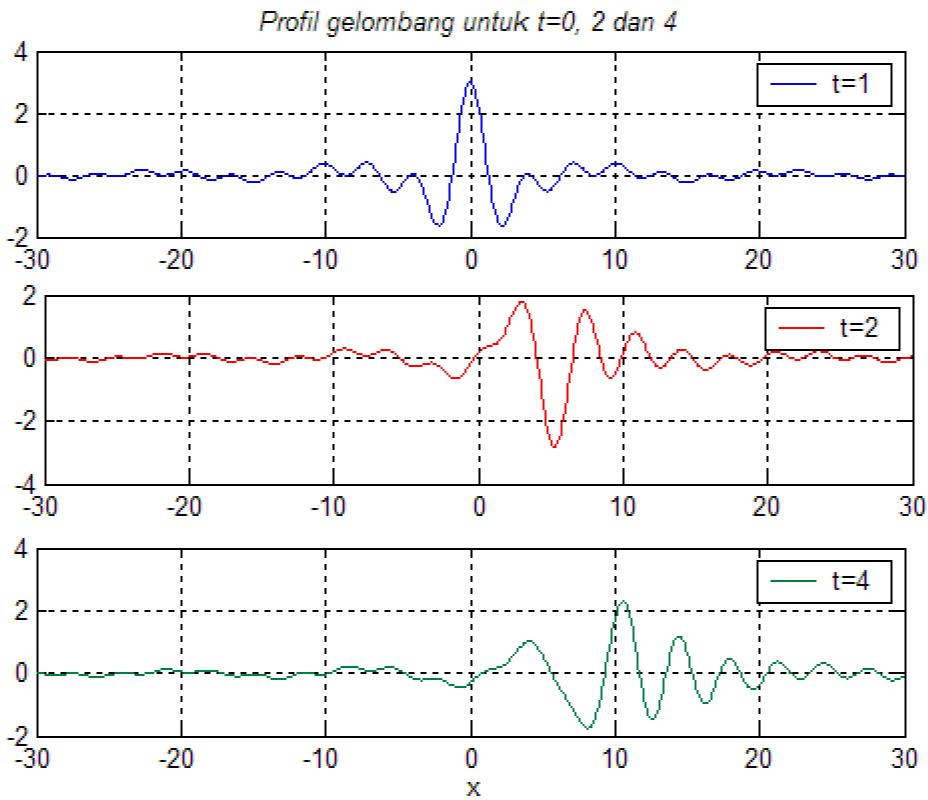


Untuk $c = 2$, diperoleh profil gelombang sebagai berikut :



Dari profil gelombang terlihat bahwa gelombang hanya bertranslansi (travelling wave) yaitu berpindah dengan kecepatan *c* sepanjang sumbu *x*. Jadi bentuk gelombang tidak berubah.

2. Jika $\omega = k^2$ (relasi dissipasi) , maka profil gelombang adalah sebagai berikut :



Dari profil gelombang terlihat bahwa dalam penjalarannya (*t* bertambah), gelombang mengalami perubahan bentuk (terjadi dissipasi).

Exercise 43

A typical example of a spectral function is a Gaussian, with standard deviation σ *:*

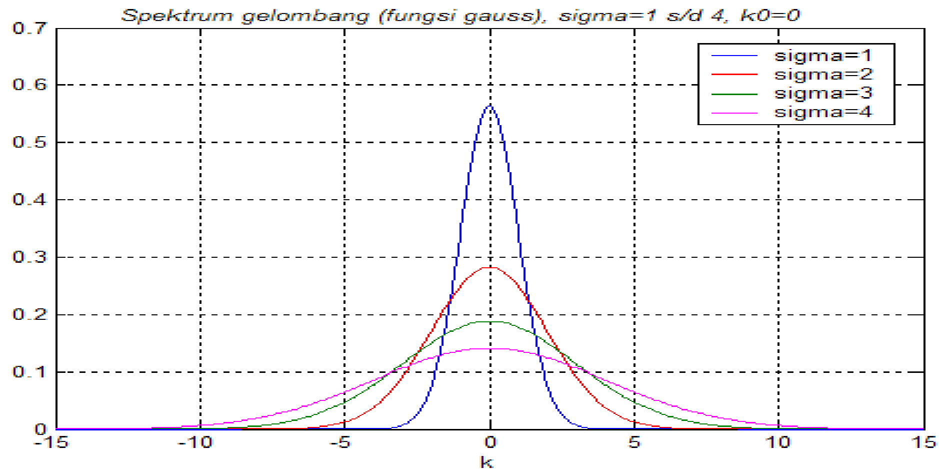
$$\hat{G}(k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{(\pi)}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}$$

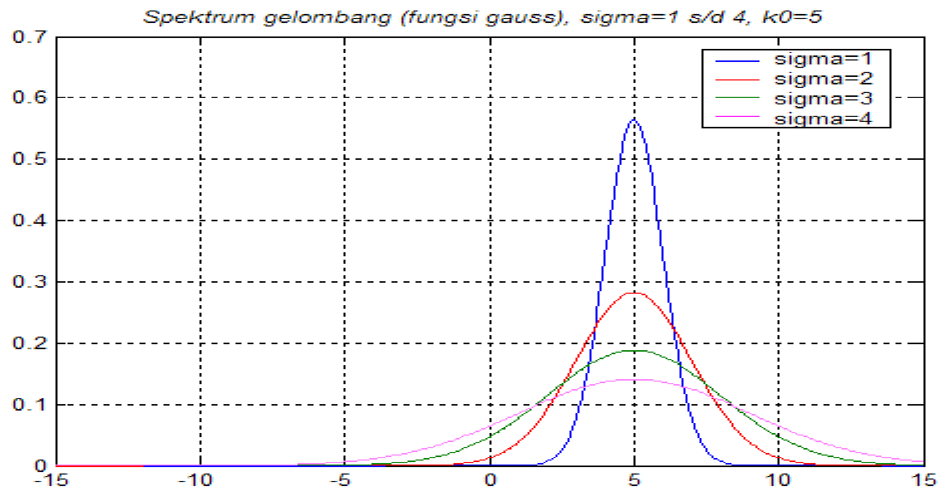
Determine the corresponding spatial profile G. Investigate for $k_0=0$ *how the value of* σ *determine the width of* $\hat{G}$ *and the spatial extension of G. Investigate the effect of* $k_0\neq 0$.

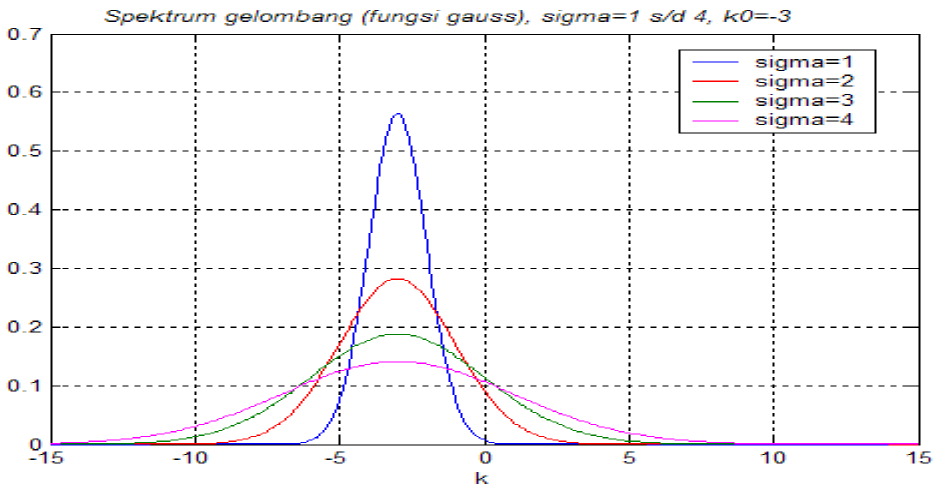
Penyelesaian :

Diketahui spektrum gelombang diberikan oleh persamaan :

$$\hat{G}(k)=\frac{1}{\sigma\sqrt{(\pi)}}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{2\sigma^2}}$$





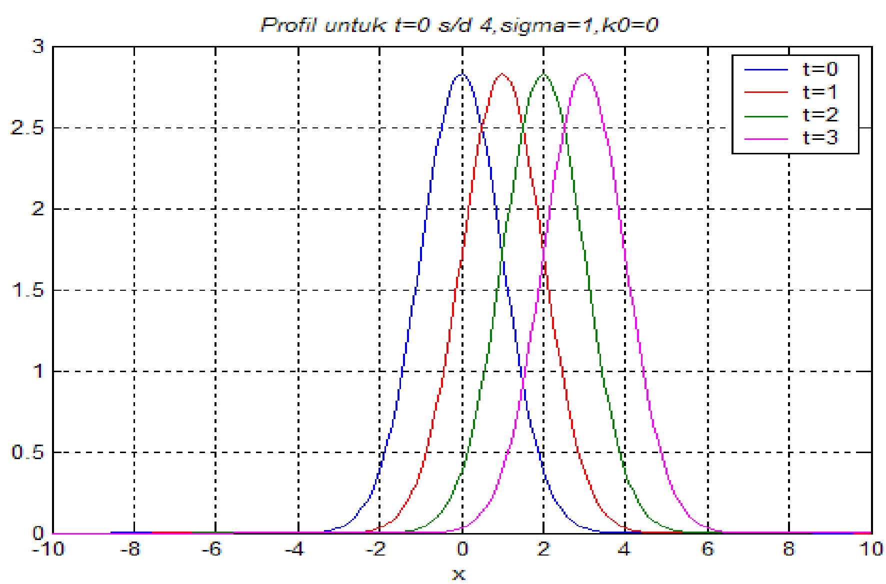


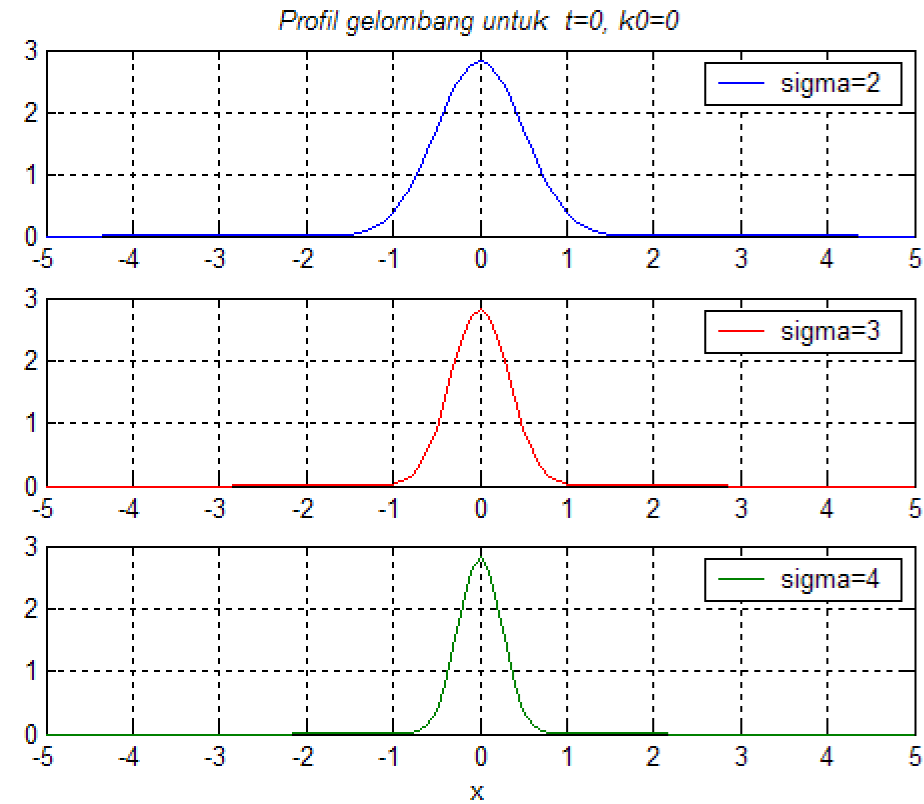
Dari gambar spektrum di atas, terlihat bahwa perubahan sigma(σ) dan k_0 memberikan efek perubahan pada bentuk spektrum. Semakin besar nilai σ, maka amplitudo dari spektrum semakin kecil. Sedangkan perubahan nilai k_0 berakibat bergesernya spektrum sebesar k_0 sepanjang sumbu k, dengan arah positif jika $k_0 > 0$ dan arah negatif jika $k_0 < 0$.

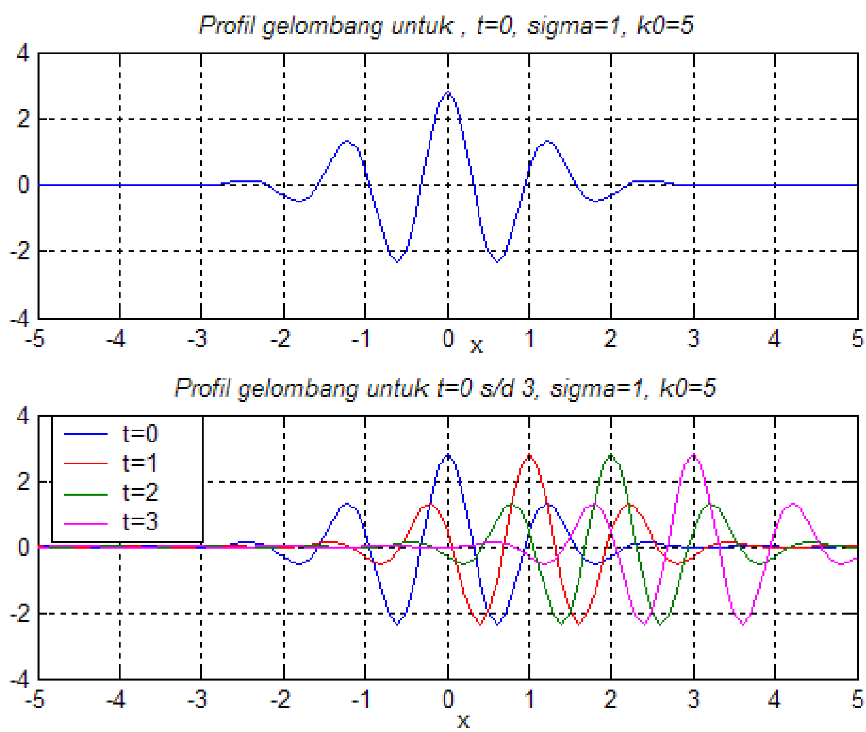
Profil Gelombang

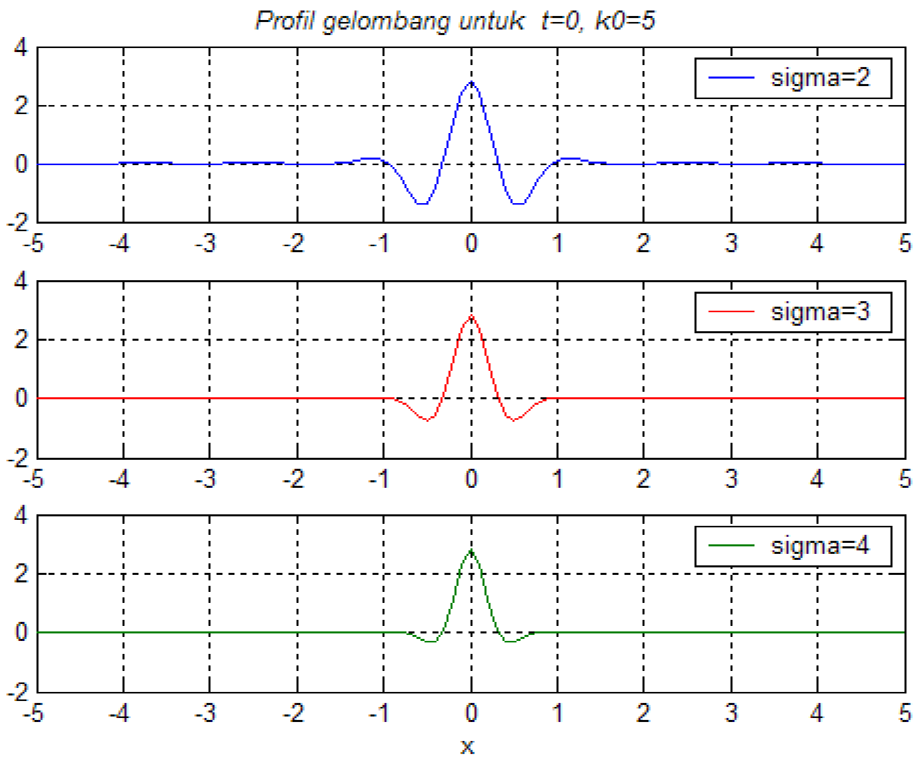
$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(k)\left(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)}\right)dk$$

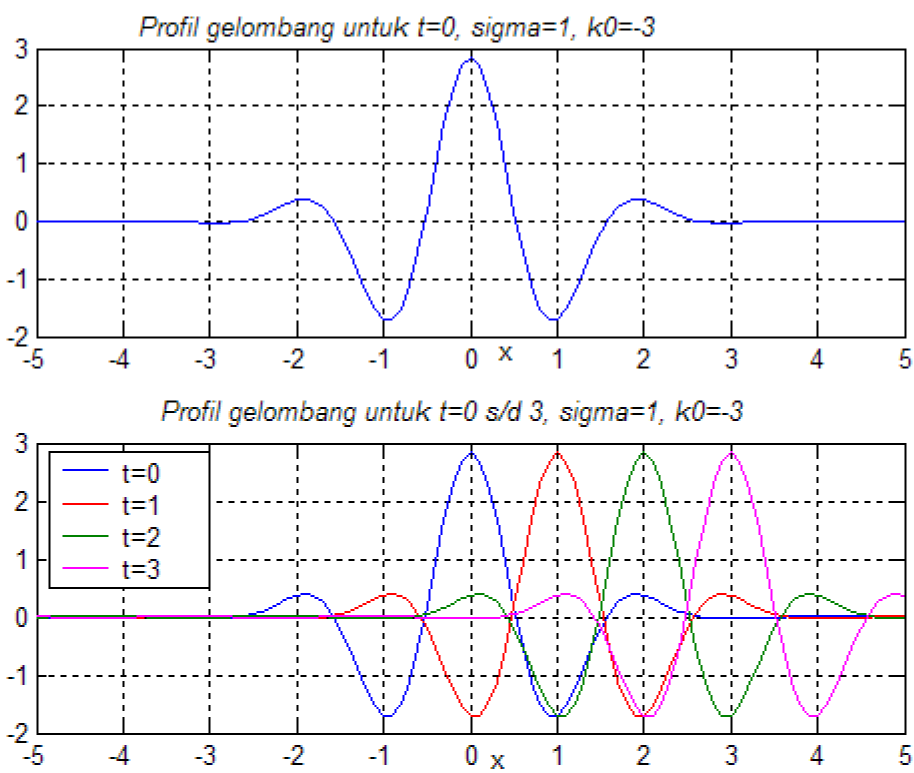
1. Misalkan $\omega = k$, maka profil gelombangnya adalah sebagai berikut :

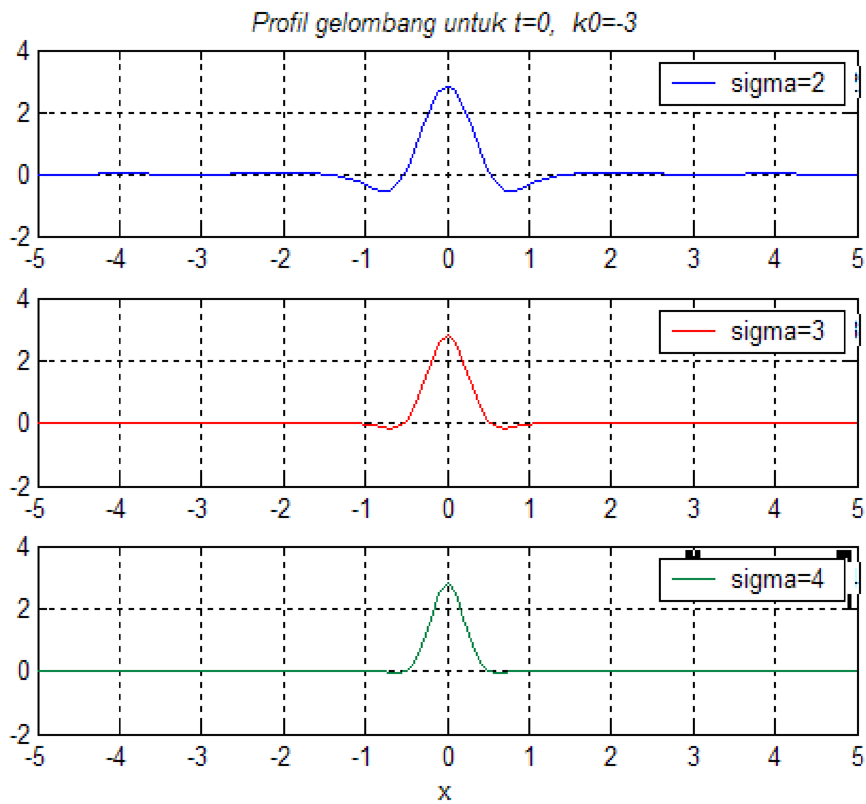



Profil gelombang untuk t=0, k0=0
sigma=2
sigma=3
sigma=4
x


Profil gelombang untuk , t=0, sigma=1, k0=5
x
Profil gelombang untuk t=0 s/d 3, sigma=1, k0=5
t=0
t=1
t=2
t=3
x


Profil gelombang untuk t=0, k0=5
sigma=2
sigma=3
sigma=4
x

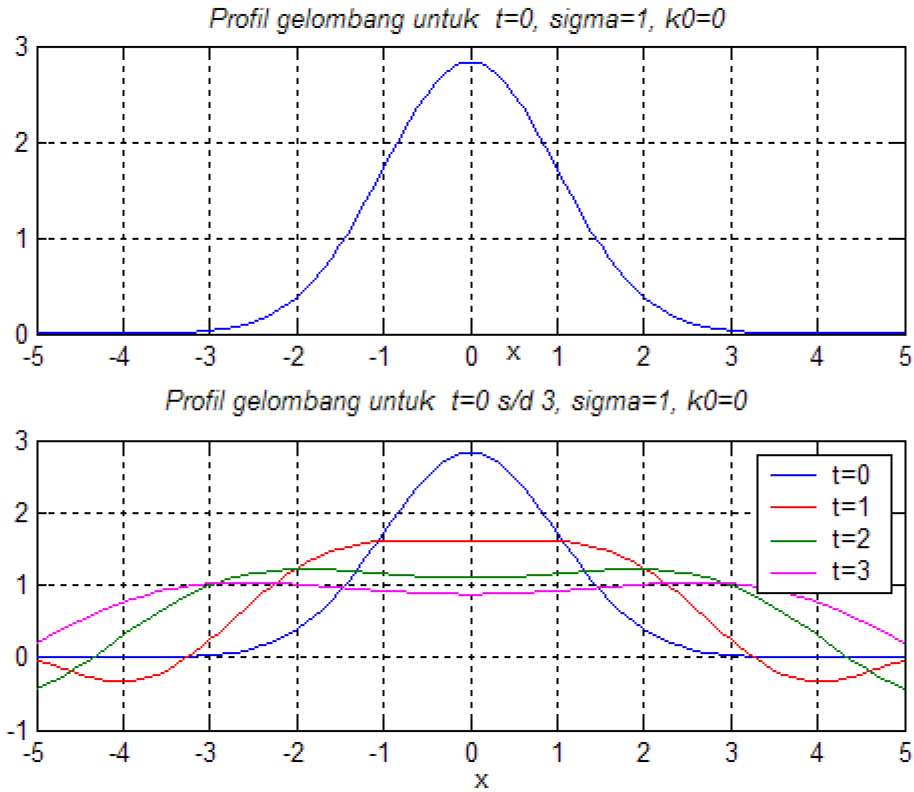

Profil gelombang untuk t=0, sigma=1, k0=-3
x
Profil gelombang untuk t=0 s/d 3, sigma=1, k0=-3
t=0
t=1
t=2
t=3
x

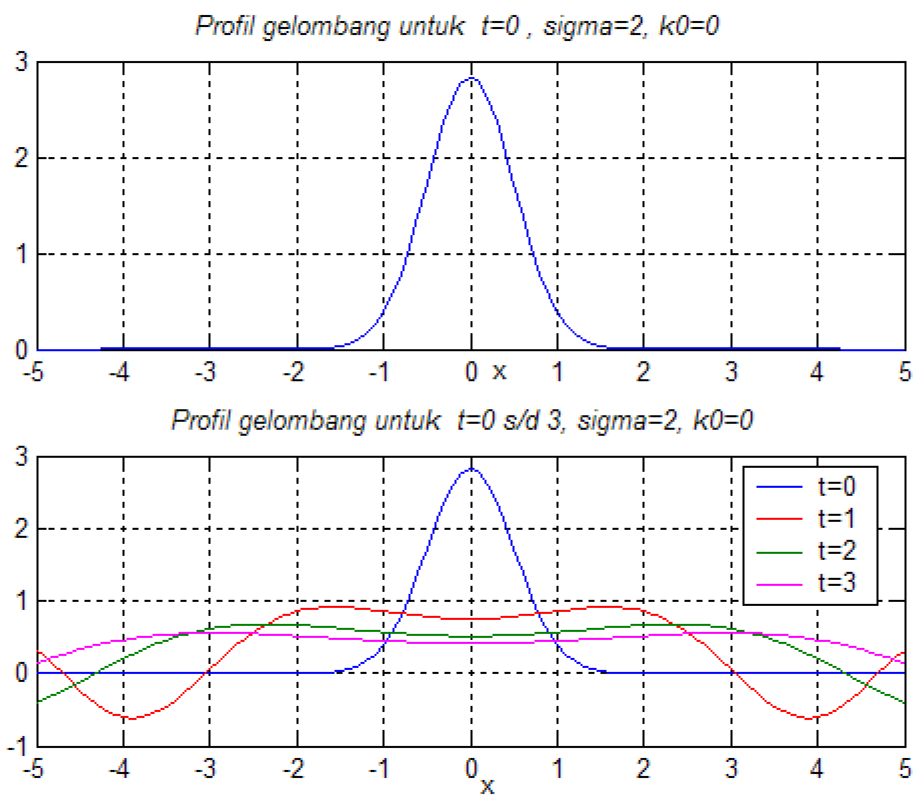


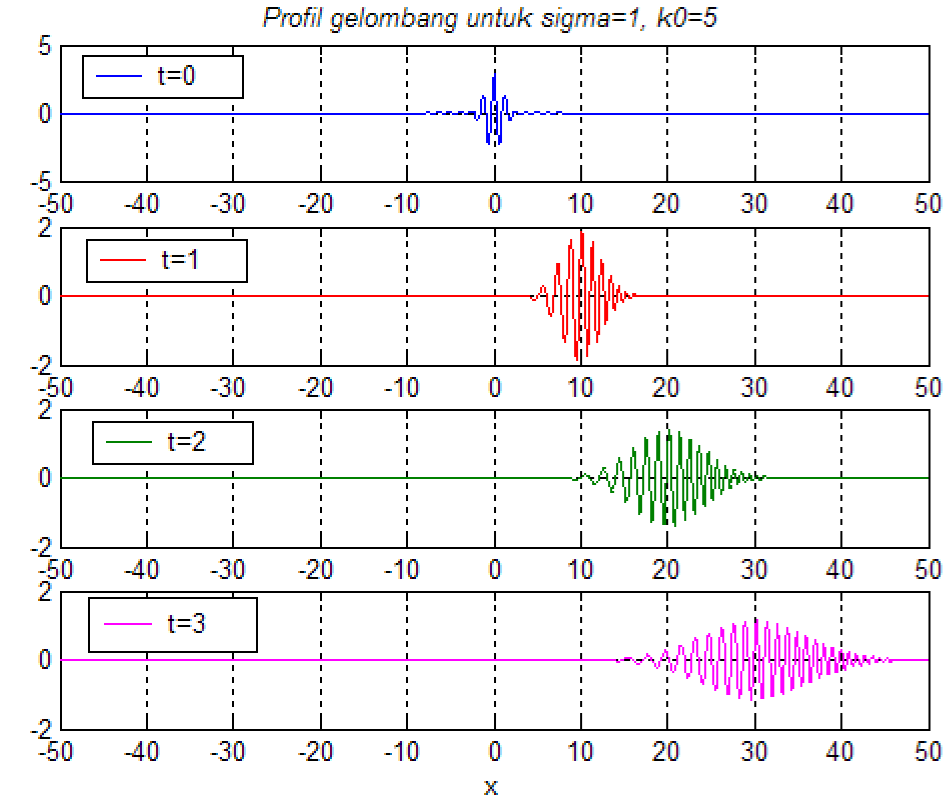
Dari profil-profil gelombang di atas terlihat :

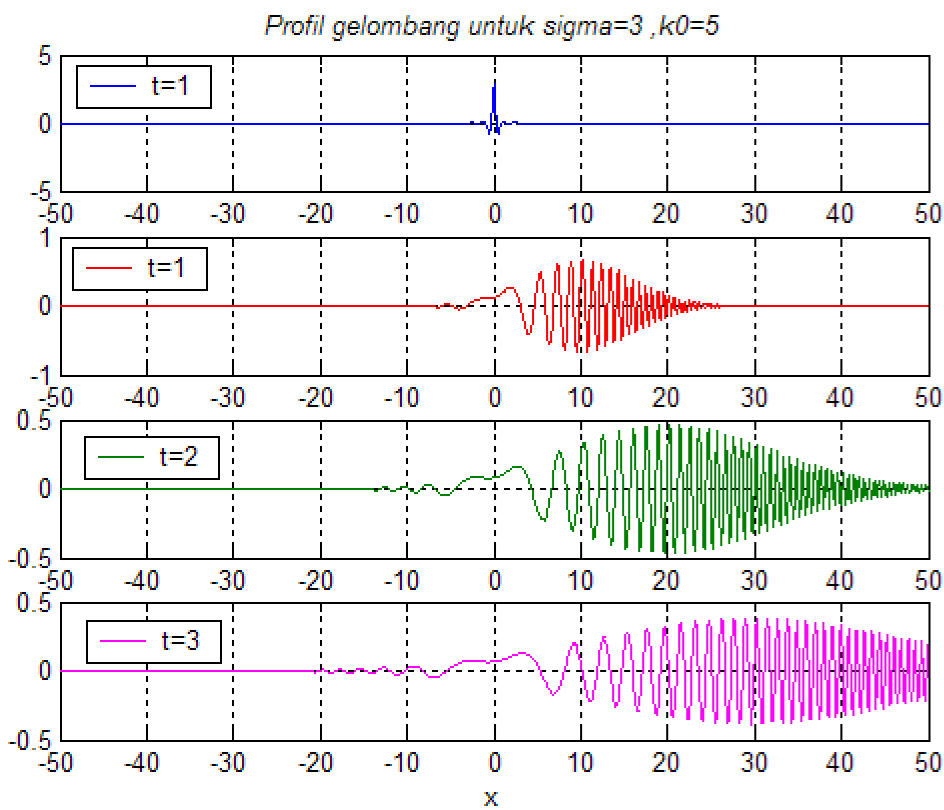
- Untuk suatu sigma(σ) dan k_0 yang tetap, gelombang hanya bertranslansi yaitu berpindah dengan kecepatan tetap sepanjang sumbu x.
- Untuk suatu k_0 yang tetap, perubahan sigma(σ) mempengaruhi kelandaian dari profil.
- Besarnya k_0 berpengaruh pada bentuk profil gelombang. Jadi, k_0 yang berbeda akan menghasilkan profil yang berbeda pula.

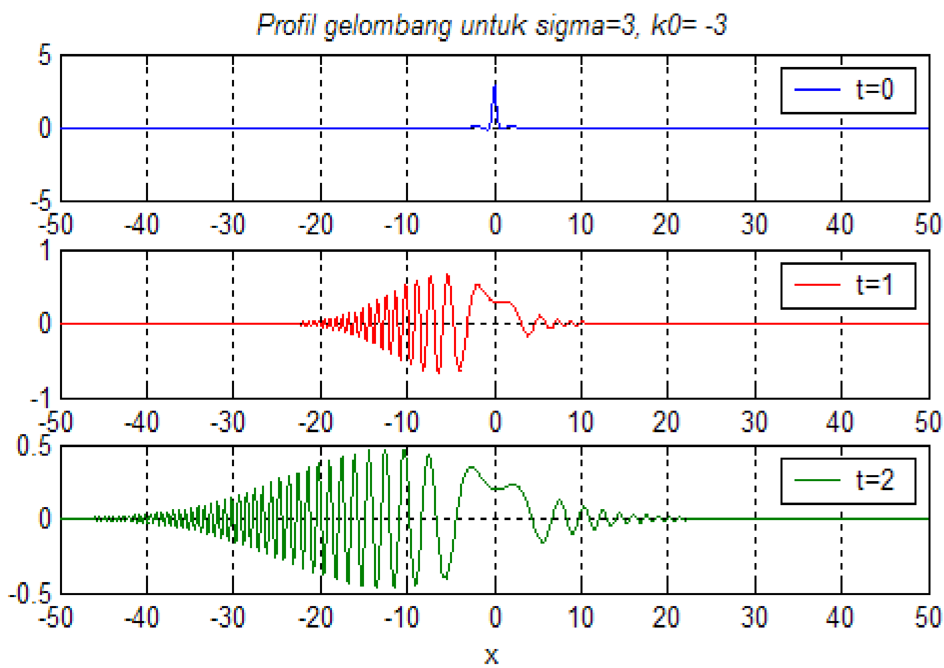
2. Misalkan $\omega = k^2$, maka profil gelombangnya adalah sebagai berikut :






Profil gelombang untuk sigma=1, k0=5
t=0
t=1
t=2
t=3
x


Profil gelombang untuk sigma=3 ,k0=5
t=1
t=1
t=2
t=3
x



Dari profil-profil gelombang di atas terlihat :

- ❖ Untuk suatu sigma(σ) dan k_0 yang tetap, penjalaran gelombang (t bertambah) menyebabkan profil gelombang mengalami dissipasi (peluruhan, amplitudonya berkurang).
- ❖ Untuk suatu sigma(σ) yang tetap, perubahan k_0 berpengaruh pada arah penjalaran profil gelombang. Kemudian penjalaran gelombang (t bertambah) pada kondisi ini, menyebabkan gelombang mengalami dissipasi (peluruhan, amplitudonya berkurang) dan bertambahnya jumlah ham dalam gelombang tersebut.
- ❖ Untuk suatu k_0 yang tetap, perubahan sigma(σ) menyebabkan terjadinya perubahan profil gelombang (bentuk amplop dari gelombang berubah) yaitu terjadi perubahan banyaknya ham dalam gelombang.

Exercise (No. 3, page 55)

The initial value problem for a second order equation describes the initial profile and the initial velocity

$$u(x,0) = f(x),\ \partial_t u(x,0) = g(x)$$

Write down in Fourier integral the solution of the IVP (initial value problem) for

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u + \partial_x^4 u$$

Animate, and interpret the solution for

$$f(x) = e^{-x^2},\ g(x) = 0.$$

Observe, and explain, that the solution remains symmetric about $x = 0$ *for all time.*

Penyelesaian:

Diketahui persamaan umum gelombang :

$$u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)} \qquad \text{….(1)}$$

Diberikan model gelombang :

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u + \partial_x^4 u \qquad \text{….(2)}$$

maka ω dapat diperoleh dengan mensubstitusi persamaan (1) ke persamaan (2), yaitu :

$$-\omega^2\left(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)}\right) = -c^2k^2 + k^4\left(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)}\right)$$

$$-\omega^2 = -c^2k^2 + k^4$$

$$\omega = \pm k\sqrt{c^2 - k^2}$$

Selanjutnya :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i(kx-wt)}dk + \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{-i(kx-wt)}dk\right)$$

atau dapat ditulis :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i(kx-wt)}dk + cc$$

Catatan : *cc* = complex conjugat

dengan $F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx$

Diketahui nilai awal :

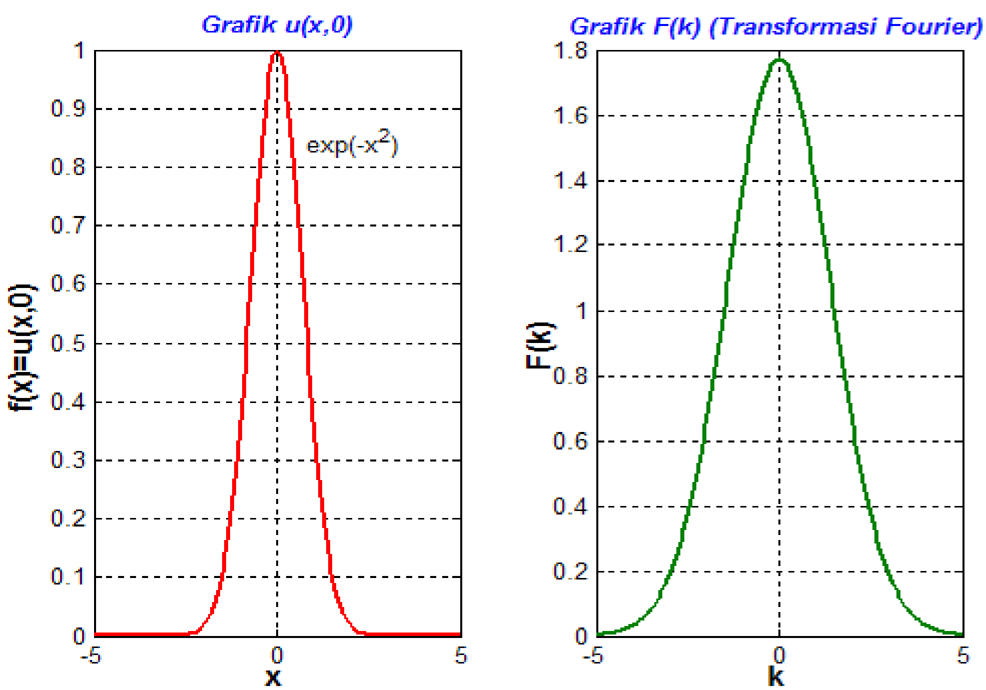
❖ $u(x,0) = f(x) = e^{-x^2}$,

maka :

$$f(x) = u(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk + cc$$

dengan $$F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-ikx}dx$$

Dengan integral Fourier nilai dari $F(k) = \sqrt{\pi}\,\exp(-1/4k^2)$



❖ $\partial_t u(x,0) = g(x) = 0$

$$\partial_t u(x,t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{i(kx-wt)}dk + cc\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)F(k)e^{i(kx-wt)}dk\right) + cc$$

Sehingga :

$$g(x) = \partial_t u(x,0) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega) F(k) e^{ikx} dk \right) + cc$$

dengan $\omega = \pm k \sqrt{c^2 - k^2}$.

Maka :

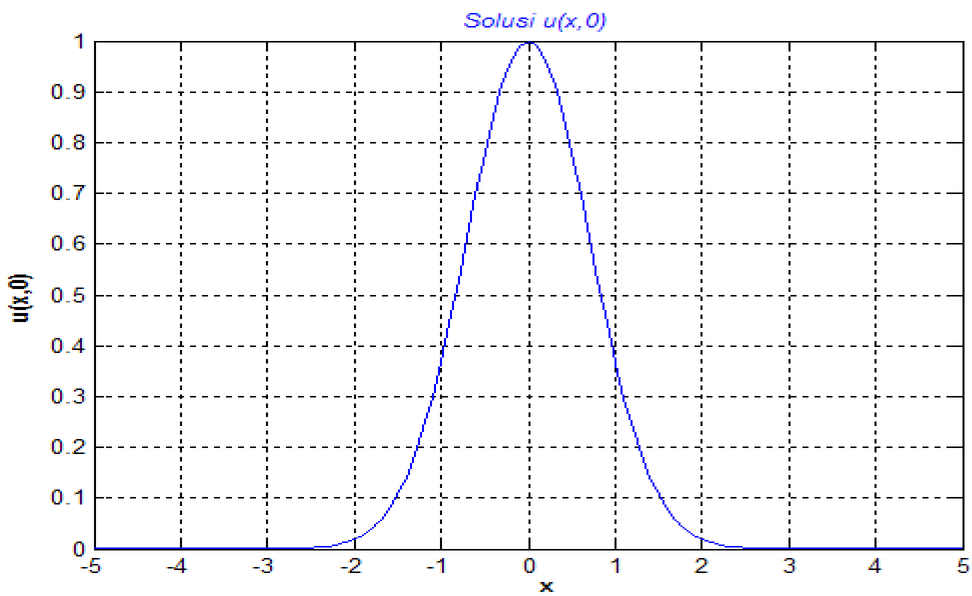
$$g(x) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i \left(k\sqrt{c^2 - k^2} \right) \left(\sqrt{\pi} \exp\left(-\tfrac{1}{4} k^2 \right) \right) e^{ikx} dk \right) + cc = 0$$

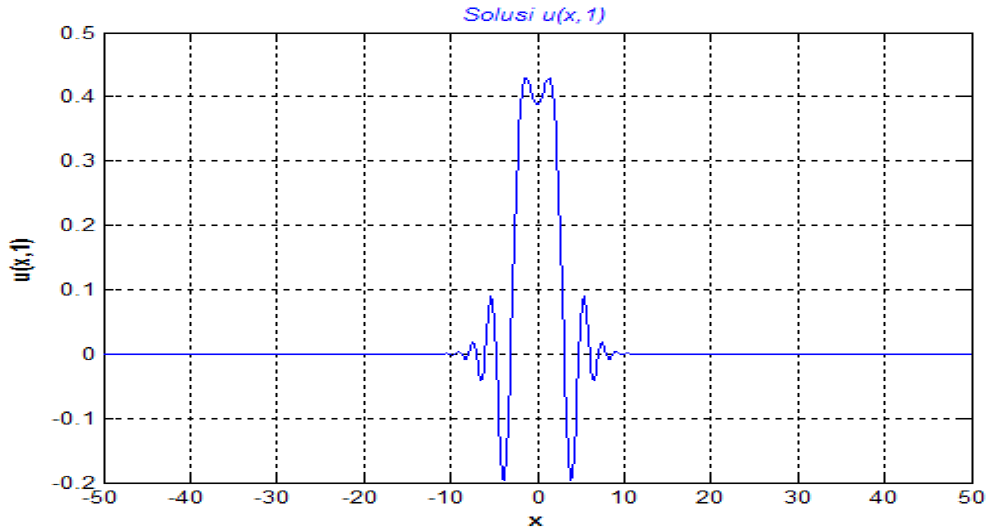
$$= \left(\frac{-i}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(k\sqrt{c^2 - k^2} \right) \exp\left(-\tfrac{1}{4} k^2 \right) e^{ikx} dk \right) + cc = 0 \qquad \text{.... (3)}$$

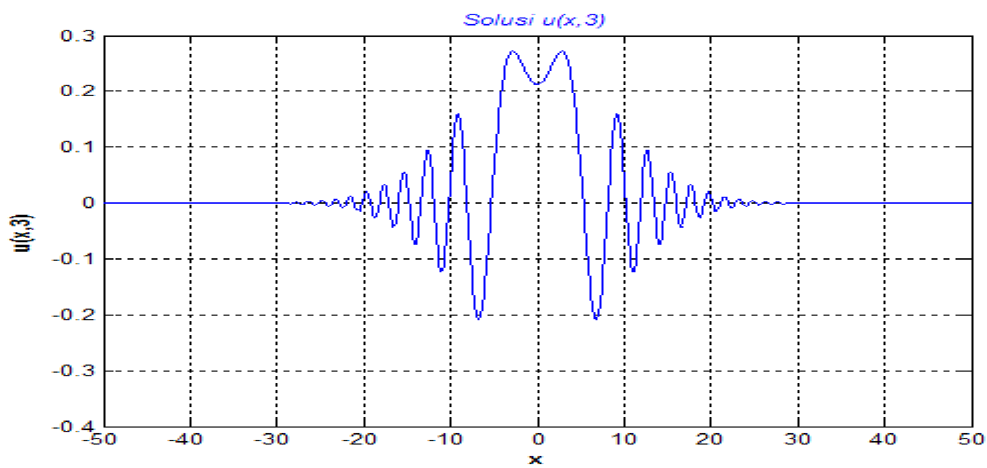
dengan menyelesaikan (3), diperoleh :

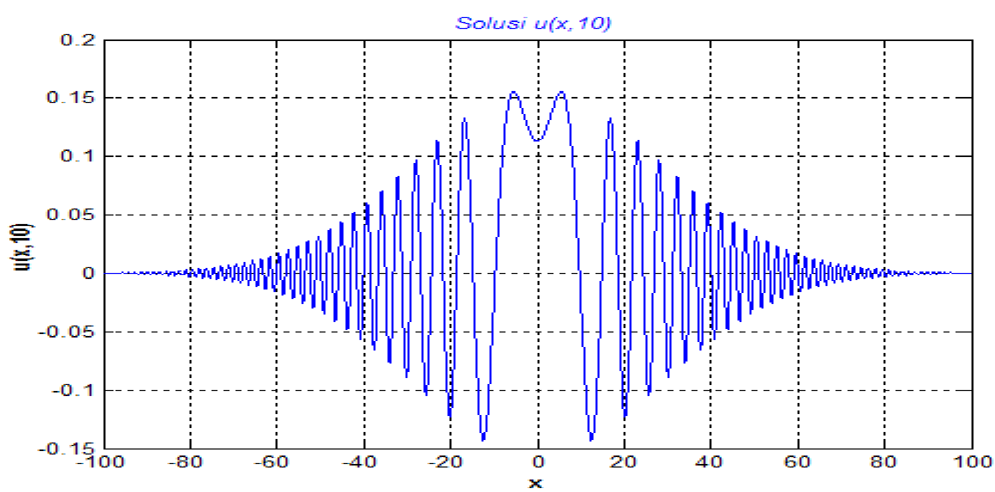
$\omega = \pm k^2$, sehinga :

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx - wt)} dk + cc = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\tfrac{1}{4} k^2 \right) \cos(kx \pm k^2 t) dk$$









Dari grafik solusi $u(x,t)$ terlihat bahwa untuk setiap t, profil gelombang selalu simetri terhadap $x = 0$.