SISTEM DINAMIK

TUGAS 2

Oleh

RIRIN SISPIYATI (20106003)

Program Studi Matematika

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2009

3-5 In certain apllications one studies the equation

$$x''+cx'-x(1-x)=0 \qquad \ldots (*)$$

with a special interest in solutions with the properties:

$\lim\limits_{x\to-\infty} x(t)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x(t)=1$, $x(t)'>0$ for $-\infty<t<+\infty$.

derive a necessary condition for the parameter c for such solutions to exist.

Penyelesaian

Misal $x = x_1$ maka $x' = x_1'$

$x' = x_2$ maka $x'' = x_2'$

Sehingga diperoleh

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_1(1-x_1) - cx_2 \end{aligned}\right\} \qquad \ldots (*)$$

Titik-titik kritis dari (*)

$$x_2 = 0$$

$$x_1(1-x_1) - cx_2 = 0$$

Untuk $x_2 = 0$, maka titik kritis yang didapat adalah (0, 0) dan (1, 0).

Jacobian dari persamaan (*) adalah sebagai berikut

$$J(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial(x_1, x_2)}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1(1-x_1)-cx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x_1 & -c \end{pmatrix}$$

$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh nilai eigennya $\lambda_{12} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2+4}}{2}$

$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -c \end{pmatrix}$, sehingga diperoleh nilai eigennya $\lambda_{12} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2-4}}{2}$

Karena c>0, maka

- untuk titik kritis (1, 0) memberikan nilai

$$\sqrt{c^2-4} < \sqrt{c^2} = c$$

Sehingga titik (1,0) positif attractor, karena $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

- untuk titik kritis (0, 0) memberikan nilai

$$\sqrt{c^2+4} > \sqrt{c^2} = c$$

Sehingga titik (0,0) negatif attractor, karena terdapat nilai eigen $\lambda > 0$.

Jika 0 < c < 2, maka orbit disekitar (1, 0) adalah spiral, karena nilai eigen dari $J(1, 0)$ imajiner.

Lebih jauh jika nilai $c \geq 2$, solusi akan ada dan akan berkorespondensi dengan sebuah titik (0, 0) unstable manifolds dan sebuah titik (1, 0) merupakan titik yang stable manifolds

3-6. Establish the attraction properties of solutions (0, 0) of

$x' = x^3 + y$

$y' = (x^2 + y^2 - 2)y$

Penyelesaian

Titik-titik kritis pada sistem dinamik diatas adalah (0, 0)

Pelinieran dari sistem dinamik diatas menggunakan Jacobian adalah sebagai berikut

$$J(x, y) = \frac{\partial}{\partial(x, y)}\begin{pmatrix} x^3 + y \\ (x^2 + y^2 - 2)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 2xy & x^2 + 3y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

Sehingga,

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -c \end{pmatrix}$$

3-7. Determine the critical points of the system

$x' = x(1 - x^2 - 6y^2)$

$y' = y(1 - 3x^2 - 3y^2)$

and characterise them by linear analysis.

Penyelesaian

Titik-titik kritis dari sistem dinamik diatas diperoleh dengan cara $x' = 0$ dan $y' = 0$.

- $x(1 - x^2 - 6y^2) = 0$

  $x = 0$ atau $(1 - x^2 - 6y^2) = 0$

- $y(1 - 3x^2 - 3y^2) = 0$

  $y = 0$ atau $(1 - 3x^2 - 3y^2) = 0$
- Titik kritis yang pertama adalah (0, 0).
- Untuk $x = 0$, maka

  $$1 - 3.0^2 - 3y^2 = 0$$

  $$1 - 3y^2 = 0$$

  $$y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

  Sehingga diperoleh dua titik kritis $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ dan $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

- Untuk $y = 0$, maka

  $$(1 - x^2 - 6.0^2) = 0$$

  $$1 - x^2 = 0$$

  $$x = \pm 1$$

  Sehingga diperoleh dua titik kritis $(0,1)$ dan $(0,-1)$.

- Dengan mengeliminasi dari persaman berikut yaitu

  $(1 - x^2 - 6y^2) = 0$

  $(1 - 3x^2 - 3y^2) = 0$

akan diperoleh 4 buah titik kritis $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{2}{15}}\right)$ dan $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$.

Berikut akan dianalisis tentang attraction dari masing-masing titik

- Untuk titik (0, 0), maka

  $J(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Sehingga diperoleh nilai eigennya $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 > 0$. Jadi dapat disimpulkan titik (0, 0) merupakan negatif attractor.

- Untuk titik $(\pm 1, 0)$, maka $J(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ dan $J(-1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Sehingga untuk $J(1, 0)$ dan $J(-1, 0)$ diperoleh nilai eigenya $\lambda_1 = \lambda_2 = -2 < 0$. Jadi dapat disimpulkan titik $(\pm 1, 0)$ merupakan positif attractor.

- Untuk titik $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, maka $J\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ dan $J\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

  Sehingga untuk $J\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ dan $J\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ diperoleh nilai eigenya $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2 < 0$. Jadi dapat disimpulkan titik $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ merupakan positif attractor.

- Untuk titik $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$, maka $J\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\sqrt{\frac{2}{15}}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{8}{25} \\ -\frac{4}{25} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$. Sehingga akan diperoleh nilai eigen berbeda tanda $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ sehingga $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}},\pm\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$ merupakan titik pelana.