SISTEM DINAMIK

TUGAS 3

Oleh

RIRIN SISPIYATI (20106003)

Program Studi Matematika

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2009

EXERCISE 4

4. 1. In Exercise 2.3 of chapter 2 we analysed the existence of perios solutions in an invariant set of a three-dymensional system. obtain this result in a more straighforward manner.

<u>Penyelesaian</u>:

Pada latihan 2.3 telah diketahui bahwa $x_3 = 1$ adalah invariant set.

Sistem persamaan pada latihan 2.3 menjadi:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^2 + x_2^2 - 1 = f(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 2x_1x_2 = g(x_1, x_2) \end{aligned} \qquad \text{...(4.1)}$$

$$\nabla.(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_1 + 1 - 2x_1 = 1$$

$\nabla.(f, g)$ definit positif.

Sehingga berdasarkan kriteria Bendixson, sistem persamaan (4.1) tidak mempunyai solusi periodik pada invariant set $x_3 = 1$.

4. 2. Consider the Lienard equation

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0 \qquad \text{...(4.2)}$$

with $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

determine the parameters a ...d such that the phase-plane contains limit cycle. How many are there?

<u>Penyelesaian</u>:

Agar persamaan (4.2) mempunyai *limit cycle*, kondisi a-c dari teorema 4.6 harus dipenuhi.

a. $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, maka $F(x) = \int_0^x f(s)ds = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{4}dx^4$ harus merupakan fungsi ganjil.

Agar $F(x)$ fungsi ganjil maka $b = d = 0$, sehingga $F(x) = ax + \frac{1}{3}cx^3$

b. $F(x) \to \infty,$ pada $x \to \infty$, berarti c > 0.

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow ax + \frac{1}{3}cx^3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(a + \frac{1}{3}cx^2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = \pm\sqrt{\frac{-3a}{c}},\ \text{dengan } a < 0 \text{ dan } c > 0$$

Ambil $\beta = \sqrt{\frac{-3a}{c}}$

Karena F(x) fungsi polinom berderajat 3, maka untuk $x > \beta, F(x) > 0.$.

c. Karena hanya ada satu titik pembuat nol pada x > 0, maka ambil $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{-3a}{c}}, a < 0$ dan $c > 0$ sedemikian sehingga F(x) < 0 untuk x>a

$\therefore$ Berdasarkan teorema 4.6, hanya terdapat sebuah solusi periodic untuk persamaan (4.2), dan solusi periodic tersebut berupa *limit cycle*.

4. 3. In the system $\dot{x} = f(y),\ \dot{y} = g(x) + y^k$ are *f* and *g* C^1 functions, $k \in N$.

a. Give sufficient conditions for k so that the system contains no periodic solutions.

b. Choose $f(y) = -y,\ g(x) = x,\ k = 2$. Does the system contain periodic solutions, cycles or limiy cycles?

<u>Penyelesaian</u>:

a. $$\begin{aligned} \dot{x} &= f(y) \\ \dot{y} &= g(x) + y^k, k \in N \end{aligned}$$

$$\nabla.(f(y), g(x) + y^k) = \frac{\partial f(y)}{\partial x} + \frac{\partial(g(x) + y^k)}{\partial y} = ky^{k-1}$$

Agar $ky^{k-1}, k \in N$ definit, maka haruslah *k* anggota himpunan bilangan ganjil.

b. $$\begin{aligned} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x + y^2 \end{aligned} \qquad ...(4.3)$$

$$\nabla.(-y, x + y^2) = 0 + 2y = 2y$$

Jika solusi periodik dari sistem persamaan (4.3) ada, haruslah solusi periodik tersebut memotong garis $y = 0$.

Sistem persamaan (4.3) dalam bentuk koordinat polar:

$$\dot{r} = r^2 \sin^3 \theta$$

$$\dot{\theta} = 1 + \frac{r}{2} \sin 2\theta$$

akan dicari $r(t)$, yaitu solusi (4.3) dalam bentuk $r = x^2 + y^2$.

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = \sin^3 \theta$$

$$\int \frac{1}{r^2} dr = \int \sin^3 \theta$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{3}\left(2 + \sin^3 \theta\right) \cos\theta + K$$

$$r(t) = \frac{3}{\left(2 + \sin^3 \theta\right)\cos\theta + K} < \frac{3}{(2+1)+K} < \frac{1}{1+K}$$

Karena solusi $r(t) \neq 0$ terbatas, maka haruslah terdapat solusi periodik untuk sistem persamaan (4.3).

4. 4. An equation arising in applications has been called after Rayleigh

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x},\ \mu > 0$$

show that the equation ha a unique periodic solution by relating it to the van der pool equation.

Penyelesaian:

$$\ddot{x} + x = \mu(1 - \dot{x}^2)\dot{x},\ \mu > 0 \qquad \text{...(4.4)}$$

Turunan pertama dari (4.4) adalah:

$$\dddot{x} + \dot{x} = \mu\left(-2\dot{x}\,\ddot{x}\,\ddot{x} + (1 - \dot{x}^2)\ddot{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \dddot{x} + \dot{x} = \mu(1 - 3\dot{x}^2)\ddot{x}$$

misal: $y = \sqrt{3}\dot{x}$ maka $\dot{y} = \sqrt{3}\ddot{x}$, $\ddot{y} = \sqrt{3}\dddot{x}$

sehingga

$$\dddot{x} + \dot{x} = \mu(1 - 3\dot{x}^2)\ddot{x}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\ddot{y}}{\sqrt{3}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = \mu \frac{\dot{y}}{\sqrt{3}}\left(1 - y^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \dot{y} = \mu(1 - y^2)\dot{y}, \mu > 0 \qquad \text{...(4.5)}$$

persamaan (4.5) adalah persamaan Van der Pool yang telah diketahui pada contoh 4.2 memiliki solusi periodik.

Akibatnya persamaan (4.4) juga memiliki solusi periodik.

4. 5. Consider again the system for exercise 3.1

$$\dot{x} = y(1 + x - y^2)$$
$$\dot{y} = x(1 + y - x^2)$$

but suppose that the equations model an experimental situation such that $x \geq 0, y \geq 0$ (for instance because x and y are quantities in chemical reactions). Do periodic solution exist?

Penyelesaian:

Misalkan :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) = y(1 + x - y^2) \\ \dot{y} &= g(x, y) = x(1 + y - x^2) \end{aligned} \qquad \text{…(4.6)}$$

maka :

$$\nabla.(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = y + x$$

Oleh karena $x \geq 0, y \geq 0$, maka $\nabla.(f, g) = y + x \geq 0$ semi definit positif. Lebih lanjut, $\nabla.(f, g) = 0$ hanya dipenuhi oleh $x = 0$ dan $y = 0$. Jadi menurut kriteria Bendixson, sistem (4.6) tidak mempunyai solusi periodik kecuali di $(0,0)$. Akan tetapi titik $(0,0)$ adalah sebuah titik kritis, jadi di (0,0) juga tidak terdapat solusi periodik. Jadi, sistem (4.6) tidak memiliki solusi periodik.

4. 6. Consider the system

$$\dot{x} = y - x^3 + \mu x$$
$$\dot{y} = -x$$

a. For which values of the parameter μ does a periodic solution exist?

b. Describe what happens as $\mu \downarrow 0$.

Penyelesaian:

a. Misalkan:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y) = y - x^3 + \mu x \\ \dot{y} &= g(x,y) = -x \end{aligned} \qquad \ldots(4.7)$$

Maka :

$$\nabla.(f,g) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = -3x^2 + \mu ,$$

❖ Kasus 1

Jika $\mu < 0$, maka $\nabla.(f,g) < 0$, $\forall (x,y)$

❖ Kasus 2

Jika $\mu > 0$, maka $\nabla.(f,g) > 0$ jika $\mu > 3x^2$ dan

$\nabla.(f,g) < 0$ jika $\mu < 3x^2$

❖ Kasus 3

Jika $\mu = 0$, maka $\nabla.(f,g) = 0$ jika $x = 0$ dan

$\nabla.(f,g) < 0$ jika $x \neq 0$

Menurut kriteria Bendixson, sistem (4.7) tidak punya solusi periodik jika $\mu < 0$, dan mungkin punya solusi periodik jika $\mu \geq 0$.

- Transformasi sistem (4.7) dalam bentuk koordinat polar :

$$\begin{aligned} r^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow r\dot{r} &= x\dot{x} + y\dot{y} \\ &= x(y - x^3 + \mu x) + y(-x) \\ &= -x^4 + \mu x^2 \\ &= -x^2(x^2 - \mu) \end{aligned}$$

Jadi, $\dot{r} = -\dfrac{x^2(x^2 - \mu)}{r}$ ...(4.8)

Untuk $\mu = 0$, $\dot{r} \leq 0$, sehingga r akan mengecil untuk *t* yang membesar (kecuali untuk $x = 0$, r konstan). Jadi, jika $\mu = 0$ maka sistem (4.7) tidak punya solusi periodik.

Untuk $\mu > 0$, persamaan (4.8) tidak dapat digunakan untuk menentukan ada tidaknya solusi periodik pada sistem.

- Tinjau kembali sistem persamaan (4.7).

$$\dot{x} = y - x^3 + \mu x$$
$$\dot{y} = -x$$

maka :

$$\ddot{x} = \dot{y} - 3x^2\dot{x} + \mu\dot{x}$$
$$\Leftrightarrow \ddot{x} = -x - 3x^2\dot{x} + \mu\dot{x}$$
$$\Leftrightarrow \ddot{x} + (3x^2 - \mu)\dot{x} + x = 0 \qquad ...(4.9)$$

Misalkan $f(x) = (3x^2 - \mu)$. $f(x)$ adalah fungsi Lipschitz dan kontinu di R.

$$F(x) = \int_0^x \left(3s^2 - \mu\right) ds$$
$$= x^3 - \mu x$$
$$= x(x^2 - \mu)$$
$$= x(x + \sqrt{\mu})(x - \sqrt{\mu})$$

yang mempunyai sifat :

- $F(x)$ adalah sebuah fungsi ganjil.
- Jika $x \to \infty$, maka $F(X) \to \infty$, dan $\exists \beta = \sqrt{\mu}$ sehingga jika $x > \beta$ maka $F(x) > 0$.
- $\exists \alpha = \sqrt{\mu} > 0$ sehingga jika $0 < x < \alpha$ maka $F(x) < 0$.

Jadi, jika $\mu > 0$ maka sistem (4.7) akan sesuai dengan fungsi Lienard dengan $\alpha = \beta = \sqrt{\mu}$. Maka menurut Teorema 4.6 sistem (4.7) mempunyai tepat satu solusi periodik yang berupa limit cycle.

b. Jika $\mu \downarrow 0$, maka α dan β akan mengecil, sehingga periode dari solusi periodiknya mengecil. Pada saat $\mu = 0$, solusi periodik akan menghilang, dan titik (0,0) adalah spiral dengan atraktor positif.

4. 7. In R^n we consider the equation $\dot{x} = f(x)$ dan a point a; $f(x)$ is continuosly differentiable. Suppose that a solution $\varphi(t)$ of the equation exists such that

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = a .$$

Show that *a* is critical point of the equation.

Penyelesaian:

Tinjau persamaan:

$$\dot{x} = f(x) \qquad \dots (4.10)$$

dan sebuah titik *a*, dimana $f(x)$ kontinu dan dapat diturunkan dimana-mana.

Misalkan $\varphi(t)$ adalah solusi dari persamaan (4.10) yang memenuhi

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = a$$

maka $\omega(x) = a$.

Menurut teorema 4.2, $\omega(x)$ adalah tertutup dan invariant, maka $x(t) = a$ adalah solusi dari $\dot{x} = f(x)$. Karena *a* adalah sustu titik, maka *a* adalah titik kritis dari $\dot{x} = f(x)$.

4. 8. In this exercise we show that the ω-limitset of an orbit of a plane system is not necessarily a critical point or a closed orbit. Conside

$$\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial y} + \lambda E\frac{\partial E}{\partial x}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial E}{\partial x} + \lambda E\frac{\partial E}{\partial y}$$

with $\lambda \in R, E(x, y) = y^2 - 2x^2 + x^4$.

a. Put $\lambda = 0$. Determine the critical points and their character by linear analysis. What happens in the nonlinear system; sketch the phase-plane.

b. What happens to the critical points of *a* if $\lambda \neq 0$.

c. Choose $\lambda < 0$; the orbit γ_1^+ starts at $t = 0$ in $(1/2, 0)$, γ_2^+ in $(-1/2, 0)$, γ_3^+ in $(1,2)$. Determine the ω-limit sets of these orbits.

Penyelesaian:

Tinjau sistem persamaan :

$$\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial y} + \lambda E \frac{\partial E}{\partial x}$$
$$\dot{y} = -\frac{\partial E}{\partial x} + \lambda E \frac{\partial E}{\partial y} \qquad \ldots(4.11)$$

dimana $\lambda \in R,$ dan $E(x, y) = y^2 - 2x^2 + x^4$

a. Jika $\lambda = 0$, maka diperoleh sistem persamaan :

$$\dot{x} = 2y$$
$$\dot{y} = 4(x - x^3) \qquad \ldots(4.12)$$

Titik kritis dari sistem ini diberikan oleh :

$$\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = 0$$
$$\dot{y} = 0 \Leftrightarrow 4x(1 - x^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$$

Jadi titik kritisnya adalah : $(0,0),\ (\pm 1,0)$.

Linearisasi dari sistem (4.12) di sekitar titik kritis diperoleh dari matriks Jacobiannya, yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 - 12x^2 & 0 \end{bmatrix}$$

❖ Pada titik (0,0)

$$J_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $J_{(0,0)}$ adalah $\pm 2\sqrt{2}$ Karena nilai eigen $J_{(0,0)}$ real dan berbeda tanda, maka titik kritis (0,0) adalah sadle.

❖ Pada titik $(\pm 1,0)$

$$J_{(\pm 1,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari $J_{(\pm 1,0)}$ adalah $\pm 4i$. Karena semua nilai eigen dari $J_{(\pm 1,0)}$ adalah imajiner murni, maka titik kritis $(\pm 1,0)$ adalah centre.