SISTEM DINAMIK

TUGAS 4

Oleh

RIRIN SISPIYATI (20106003)

Program Studi Matematika

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG

2009

2-1 Consider the equation

$$\ddot{x} - \lambda\dot{x} - (\lambda-1)(\lambda-2)x = 0$$

With λ a real parameter. Find the critical points and characterize these points. Sketch the flow in the phase-plane and indicate the direction of the flow.

Jawab :

Misalkan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \ddot{x} &= \dot{y} = \lambda y + (\lambda-1)(\lambda-2)x \end{aligned} \qquad (21.1)$$

jika $\lambda \neq 1$ dan $\lambda \neq 2$, Titik kritis dari (21.1) adalah *(0,0)* ;

jika $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, axis *x* mengandung titik kritis dari (21.1). Sistem persamaan (21.1) dapat ditulis sebagai :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda-1)(\lambda-2) & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad (21.2)$$

Pandang matriks $\quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\lambda-1)(\lambda-2) & \lambda \end{pmatrix}$

Jika $\lambda = 1$ dan $\lambda = 2$, matriks tersebut menjadi singular, sehingga titik kritisnya *degenerate*.

jika $\lambda \neq 1$ dan $\lambda \neq 2$, dapat diperoleh nilai eigen dari matriks A, misalkan nilai eigennya adalah *r*, sehingga :

$$\begin{pmatrix} 0-r & 1 \\ (\lambda-1)(\lambda-2) & \lambda-r \end{pmatrix} \qquad (21.3)$$

Dari (21.3) diperoleh persamaan karakteristik-nya :

$$-r(\lambda-r) - (\lambda-1)(\lambda-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad r^2 - \lambda r - \lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$$

Didapat nilai-nilai eigen :

$$r_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4(-\lambda^2 + 3\lambda - 2)}}{2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{5\lambda^2 - 12\lambda + 8}}{2} \qquad (21.4)$$

Misalkan $\quad D = 5\lambda^2 - 12\lambda + 8 > 0,\ \forall\lambda \in R$ (definit positif)

Sehingga nilai-nilai eigen r_1 dan r_2 keduanya merupakan bilangan real.

Salah satu nilai eigen, misalkan r_1, akan bernilai negatif, jika :

$$\lambda < \sqrt{5\lambda^2 - 12\lambda + 8}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 < (5\lambda^2 - 12\lambda + 8)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4\lambda^2 - 12\lambda + 8 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda < 1 \text{ atau } \lambda > 2$$

Untuk $\lambda < 1$ atau $\lambda > 2$, atau nilai eigen $r_1 = \dfrac{\lambda - \sqrt{D}}{2} < 0$, sedangkan $r_2 = \dfrac{\lambda + \sqrt{D}}{2} > 0$, sehingga diperoleh solusi :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} e^{r_1 t} + Q\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} e^{r_2 t} \qquad (21.5)$$

Dimana $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ merupakan vector eigen yang bersesuaian dengan r_1,dan $\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}$ merupakan vector eigen yang bersesuaian dengan r_2. Solusi (21.5) merupakan kombiasi linier dari dua buah solusi.

Misalkan solusi 1 = $x_1(t)$:

$$x = P\varepsilon_1 e^{r_1 t}$$

$$y = P\varepsilon_2 e^{r_1 t}$$

Dengan mengeliminasi *t* diperoleh $x = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} y$, yang berarti bahwa solusi terletak pada garis lurus. Karena $r_1 < 0$, akibatnya jika $t \to \infty$, nilai $x \to 0$ dan $y \to 0$, sehingga arahnya menuju titik (0,0)

Misalkan solusi 2 = $x_2(t)$:

$$x = Q\gamma_1 e^{r_2 t}$$

$$y = Q\gamma_2 e^{r_2 t}$$

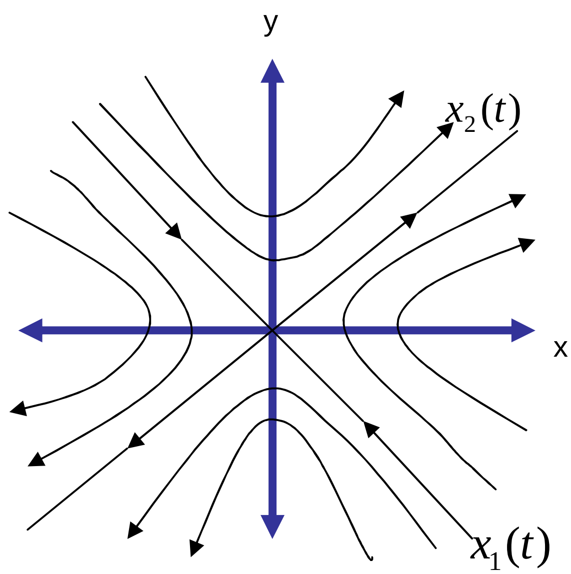
Dengan mengeliminasi t diperoleh $x = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} y$, yang berarti bahwa solusi terletak pada garis lurus. Karena $r_2 > 0$, akibatnya jika $t \to \infty$, nilai $x \to \infty$ dan $y \to \infty$, sehingga arahnya menuju ∞

Solusi dari (21.5) adalah kombinasi linier dari dua buah solusi, yaitu $x_1(t)$ dan $x_2(t)$

Untuk $t \to \infty$, solusi $x_2(t)$ menjadi dominan, dan $x_1(t) \to 0$, sehingga semua solusi-solusi dengan $Q \neq 0$ mendekati garis $x = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} y$,

Jika $P \neq 0$, $t \to -\infty$, solusi-solusi mendekati garis $x = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} y$.

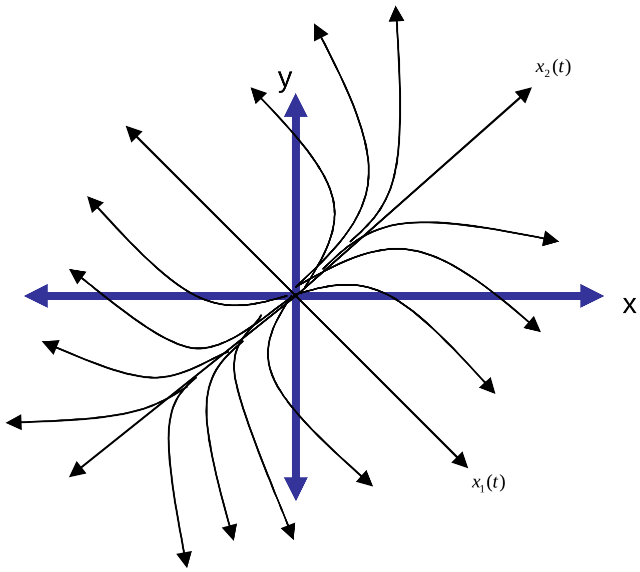
Sketsa :



Titik kritis *(0,0)* disebut *saddle*.

Jadi, untuk $\lambda < 1$ atau $\lambda > 2$,diperoleh dua nilai eigen bilangan real dan berbeda tanda. Titik kritis *(0,0)* merupakan *saddle point*.

Untuk $1 < \lambda < 2$, diperoleh nilai eigen $r_1 > 0$ dan $r_2 > 0$, sketsa solusi pada ruang fase :



Titik kritis *(0,0)* disebut *node*

Jadi, untuk $1 < \lambda < 2$,, diperoleh dua buah nilai eigen bilangan real, dan keduanya positif. Titik kritis *(0,0)* merupakan *node.*

Cara alternatif :

Sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \lambda y + (\lambda - 1)(\lambda - 2)x \end{aligned} \qquad (21.6)$$

Dilakukan eliminasi :

$$\lambda \dot{x} = \lambda y$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{y} = \lambda y + (\lambda - 1)(\lambda - 2)x$$

$$\overline{\hspace{8cm}} -$$

$$\lambda \dot{x} - \dot{y} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)x$$

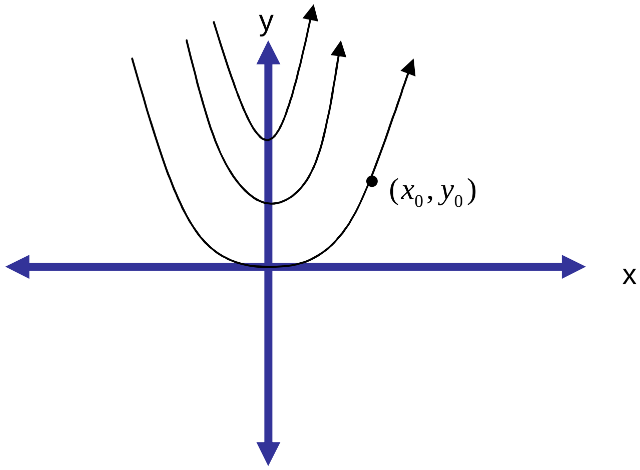
$$\Leftrightarrow \dot{y} = \lambda \dot{x} + (\lambda - 1)(\lambda - 2)x$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \lambda \frac{dx}{dt} + (\lambda - 1)(\lambda - 2)x$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x \frac{dy}{dt} dt = \int_0^x \lambda \frac{dx}{dt} dt + (\lambda - 1)(\lambda - 2) \int_0^x t dt$$

$$\Leftrightarrow \; y = \lambda x + \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{2}x^2 + C$$

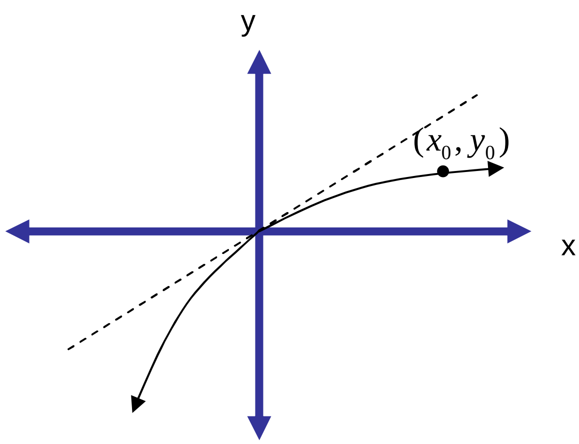
Untuk $\lambda < 1$ atau $\lambda > 2$, diperoleh grafik pada ruang fase :



Ambil sebuah titik (x_0, y_0) pada sebuah persamaan solusi, Jika x_0 bergerak ke arah kanan (membesar),maka nilai y_0 akan bergerak ka arah atas (membesar).

Maka titik kritis *(0,0)* disebut *saddle*.

Untuk $1 < \lambda < 2$, diperoleh grafik pada ruang fase :



Untuk mengetahui arahnya, ambil $\lambda = 1{,}5$, persamaan solusi menjadi $y = 1{,}5x - \frac{1}{8}x^2 + c$.

Ambil sebuah titik x_0 =1, maka y_0 =1,375 (kuadran I),

Jika x_0 =2, maka y_0 =2,75.

Artinya, jika *x* membesar, maka nilai *y* juga membesar, sehingga arahnya menuju tak hingga.

Jika (x_0, y_0) dikuadran IV :

x_0=-1, maka y_0=-1,625,

x_0=-2, maka y_0=-3,5, sehingga jika $x \to -\infty$,maka $y \to -\infty$

Kesimpulan : pada kasus ini titik *(0,0)* disebut titik *node.*

2-2 An extension of the Volterra-Lotka model of examples 2.7 & 2.15 is obtained by takin into account the saturation affect which is caused by a large number of prey. The equations become

$$\dot{x} = ax - b\frac{xy}{1 + sx}$$

$$\dot{y} = b\frac{xy}{1 + sx} - cy$$

With $x, y \geq 0$: the parameters are all positive.

Determine the equilibrium solutions and their attraction properties by linierisation.

Jawab :

Titik kritis diperoleh jika $f_1(x) = 0$ dan $f_2(x) = 0$, yaitu :

$$f_1(x) = ax - b\frac{xy}{1+sx} = 0 \qquad (22.1)$$

dan
$$f_2(x) = b\frac{xy}{1+sx} - cy = 0 \qquad (22.2)$$

dari (22.1) didapat :

$$x(a - b\frac{y}{1+sx}) = 0 \qquad (22.3)$$

Dari (22.2) didapat :

$$y(\frac{bx}{1+sx} - c) = 0 \qquad (22.4)$$

Jika *x=0* , maka *y=0*, titik kritisnya : (0,0)

Jika $x \neq 0$, maka $$a - b\frac{y}{1+sx} = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b}{1+sx}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{a(1+sx)}{b} \tag{22.5}$$

Subsitusi (22.4) ke (22.5) :

$$\left(\frac{a(1+sx)}{b}\right)\left(\frac{bx}{1+sx} - c\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a}{b}(bx - c - csx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\left(a - \frac{acs}{b}\right) = \frac{ac}{b}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{c}{b - cs}$$

Kemudian ,

$$y = \frac{a}{b}\left(1 + \frac{sc}{b - cs}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{a}{b - cs}$$

Jadi diperoleh titik kritis $\left(\frac{c}{b-cs}, \frac{a}{b-cs}\right)$

Karena $x \geq 0, y \geq 0$, serta semua parameter bernilai positif,maka *b-cs* >0.

Proses linierisasi dipersekitaran titik *x=a* akan menghasilkan bentuk : $\dot{y} = Ay$

Dengan $$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \frac{by}{(1+sx)^2} & \frac{-bx}{1+sx} \\ \frac{by}{(1+sx)^2} & \frac{bx}{1+sx} - c \end{pmatrix}$$

Untuk titik (0,0);

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh system persamaan :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax \\ \dot{y} &= -cy \end{aligned} \qquad (22.6)$$

Solusi dari (22.6) adalah

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^{at} \\ y &= C_2 e^{-ct} \end{aligned} \qquad (22.7)$$

Maka titik kritis (0,0) adalah *saddle*.

Untuk titik $\left(\dfrac{c}{b-cs}, \dfrac{a}{b-cs}\right)$:

$$\text{A=}\begin{pmatrix} a - \dfrac{b\dfrac{a}{b-cs}}{(1+s\dfrac{c}{b-cs})^2} & \dfrac{-b\dfrac{c}{b-cs}}{1+s\dfrac{c}{b-cs}} \\ \dfrac{b\dfrac{a}{b-cs}}{(1+s\dfrac{c}{b-cs})^2} & \dfrac{b\dfrac{c}{b-cs}}{1+s\dfrac{c}{b-cs}} - c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{ab^2 - ab(b-cs)}{b^2} & \dfrac{-bc}{(b-cs)(\dfrac{b}{b-cs})} \\ \dfrac{ba}{b^2}(b-cs) & \dfrac{bc}{(b-cs)(\dfrac{b}{b-cs})} - c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\dfrac{acs}{b} & -c \\ a - \dfrac{acs}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

Diperoleh system persamaan ;

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{acs}{b} & -c \\ \frac{a(b-cs)}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \qquad (22.8)$$

Atau equivalent dengan ;

$$\dot{x} = -\frac{acs}{b}(x - x_0) - c(y - y_0)$$

$$\dot{y} = a - \frac{acs}{b}(x - x_0)$$

2-3 We are studying the three-dimensional system

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 - x_2^3 + x_3(x_1^2 + x_2^2 - 1 - x_1 + x_1 x_2 + x_2^3)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - x_3(x_1 - x_2 + 2x_1 x_2)$$

$$\dot{x}_3 = (x_3 - 1)(x_3 + 2x_3 x_2^2 + x_3^3)$$

a. Determine the critical points of this system
b. Show that the planes $x_3 = 0$ and $x_3 = 1$ are invariant sets.
c. Consider the invariant set $x_3 = 1$. Does this set contain periodic solution?

Jawab :

Misalkan :

$$f_1(x) = \dot{x}_1 = x_1 - x_1 x_2 - x_2^3 + x_3(x_1^2 + x_2^2 - 1 - x_1 + x_1 x_2 + x_2^3)$$

$$f_2(x) = \dot{x}_2 = x_1 - x_3(x_1 - x_2 + 2x_1 x_2)$$

$$f_3(x) = \dot{x}_3 = (x_3 - 1)(x_3 + 2x_3 x_2^2 + x_3^3)$$

a. Untuk menentukan titik kritis dari system di atas, harusla

2-4 Suppose that a very long conductor has been fixed in a vertical straight line : a constant current *I* passes though the conductor. A small conductor, length *l* and mass *m*, had been placed in vertical straight line; it has been fixed to a spring which can move horizontally. A constant current *I* passes through the small conductor. The small conductor will be put into motion in *x*-direction but it remains parallel to the long conductor; without deformation of the spring, its position is $x=0$. The fixed position of the long conductor is given by $x=a$. the equation of motion of the small conductor is

$$m\ddot{x}+kx-\frac{2Iil}{a-x}=0$$

With *k* positive and $x<a$.

a. Show that, putting $\lambda = 2Iil/k$, the equation can be written as

$$\ddot{x}-\frac{k}{m}\frac{x^2-ax+\lambda}{a-x}=0$$

b. Put the equation in the frame work of Hamiltonian systems.
c. Copute the critical points and characterize them. Does the result agree with the Hamiltonian nature of the problem?
d. Skech the phase-plane for various value of λ

Jawab:

a. $m\ddot{x}+kx-\dfrac{2Iil}{a-x}=0$ ...... (*)

substitusikan $\lambda=\dfrac{2Iil}{k}$ ke persamaan (*)

$$m\ddot{x}+kx-\frac{\lambda k}{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}+\frac{k\left(ax-x^2-\lambda\right)}{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x}-\frac{k\left(x^2-ax+\lambda\right)}{m\left(a-x\right)}=0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}+\frac{(a-x)kx-\lambda x}{a-x}=0$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{x}+\frac{akx-kx^2-\lambda x}{a-x}=0$$

b.

$$\dot{x}=y$$

$$\dot{y}=k\frac{(x^2-ax+\lambda)}{m(a-x)}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{k\left(\frac{x^2-ax+\lambda}{m(a-x)}\right)}$$

$$\int k\left(\frac{x^2-ax+\lambda}{m(a-x)}\right)dx=\int ydy$$

$$\int k\left(\frac{x^2-ax}{m(a-x)}+\frac{\lambda}{m(a-x)}\right)dx=\int ydy$$

$$\int k\left(\frac{x(a-x)}{m(a-x)}+\frac{\lambda}{m(a-x)}\right)dx=\int ydy$$

$x\neq a$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m}\frac{1}{2}x^2+k\frac{\lambda}{m}(-\ln(a-x))=\frac{1}{2}x^2+C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{k}{m}\frac{1}{2}x^2-k\frac{\lambda}{m}\ln(a-x)=\frac{1}{2}x^2+C$$

$F(x,y)=\frac{k}{m}\frac{1}{2}x^2+k\frac{\lambda}{m}\ln(a-x)+\frac{1}{2}y^2$: first integral

Dengan memasukan $\begin{array}{l} p=m\dot{x} \\ q=x \end{array}$

sehingga hamiltoniannya

$$H(p,q)=\frac{1}{2}\frac{ka^2}{m}+k\frac{\lambda}{m}\ln(a-q)+\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$$

karena :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\left(\frac{kq}{m} + \frac{kx}{m}.\frac{1}{a-q} - 1\right) = -\frac{kq}{m} - \frac{k\lambda}{m(a-q)}$$

$$\dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

c.

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = k\frac{\left(x^2 - ax + \lambda\right)}{m(a-x)}$$

Titik kritis diperoleh dari

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{y} = 0 \quad \rightarrow \quad k\frac{\left(x^2 - ax + \lambda\right)}{m(a-x)} = 0$$

$$k\left(x^2 - ax + \lambda\right) = 0$$

karena k bilangan positif maka $\left(x^2 - ax + \lambda\right) = 0$

jadi $\quad x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\lambda}}{2}$

Titik kritis tergantung dari nilai $a^2 - 4\lambda$

1) Jika

$$a^2 - 4\lambda > 0 \text{ maka } a^2 > 4\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda < \frac{a^2}{4}$$

Jadi untuk $\lambda < \frac{a^2}{4}$ terdapat 2 titik kritis yaitu $(x_1, 0)$ dan $(x_2, 0)$

$$x_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4\lambda}}{2} \text{ dan } x_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4\lambda}}{2}$$

$(x_1, 0)$ membentuk saddle dan $(x_2, 0)$ membentuk centre

2) Jika

$$a^2 - 4\lambda = 0 \text{ maka } a^2 = 4\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{a^2}{4}$$

Jadi untuk $\lambda = \frac{a^2}{4}$ terdapat 2 titik kritis yang bergabung menjadi titik kritis degenerate.

3) Jika

$$a^2 - 4\lambda < 0 \text{ maka } a^2 < 4\lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda > \frac{a^2}{4}$$

Jadi untuk $\lambda > \frac{a^2}{4}$ tidak ada titik kritis sehingga tidak ada titik setimbang.