

# **TEORI KONTROL OPTIMUM**

## **TUGAS**

Oleh

**RIRIN SISPIYATI(20106003)**  
**KARTIKA YULIANTI (20106010)**  
**SRI SULASTERI (20106006)**

**Program Studi Matematika**



**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG**  
**2009**

# PENERAPAN *QUADRATIC OPTIMAL CONTROL* PADA UPAYA PENGURANGAN SAMPAH DI TELUK JAKARTA

Abstrak: Makalah ini menyajikan masalah tentang *quadratic optimal control* pada upaya pengurangan pencemaran yang diakibatkan oleh sampah di Teluk Jakarta. Jumlah sampah di Teluk Jakarta pada saat ini sudah melebihi ambang batas ditambah dengan sampah dari sungai-sungai yang bermuara ke Teluk Jakarta. Dengan melakukan tinjauan dua kasus yaitu: 1. jumlah sampah pada bulan ke-12 (setelah 1 tahun) *fixed* sehingga dapat dilihat seberapa persen pengurangan jumlah sampah dalam satu tahun; dan 2. untuk kasus *free* dapat dilihat jumlah sampah pada bulan ke-12 setelah dilakukan pengontrolan.

## I. LATAR BELAKANG MASALAH

Teluk Jakarta, terletak di sebelah Utara kota Jakarta, adalah perairan dangkal (kedalaman rata-rata 15 m), dengan luas sekitar 514 km<sup>2</sup>. Di teluk ini bermuara 13 sungai yang melintasi Kawasan Metropolitan Jakarta (Jabotabek) yang berpenduduk sekitar 20 juta jiwa.

Dengan perkembangan Kawasan Metropolitan Jakarta selama setengah abad terakhir, Teluk Jakarta menerima tekanan yang besar sebagai akibat dari aktivitas manusia, antara lain berupa pencemaran. Menurut data dari Badan Pengendalian Dampak Lingkungan, dalam 10 tahun terakhir Teluk Jakarta telah mengalami pencemaran yang melebihi ambang batas. Setidaknya 83% dari 13 sungai yang bermuara ke Teluk Jakarta telah masuk dalam kategori tercemar berat.

Penyebab terbesar pencemaran di Teluk Jakarta adalah sampah. Berdasarkan data yang ada, jumlah sampah per hari di DKI Jakarta sekitar 6000 ton. Akan tetapi, dari jumlah sampah tersebut hanya 85% yang bisa ditangani oleh Dinas Kebersihan DKI Jakarta (dibuang ke TPA). Berarti, sampah yang tidak bisa ditangani oleh Dinas Kebersihan DKI Jakarta adalah 15% atau sekitar 900 ton/hari. Sampah-sampah yang tidak bisa ditangani tersebut (900 ton), 25% nya dibuang langsung ke sungai-sungai yang ada di Jakarta, sehingga jumlah sampah yang mungkin masuk ke Teluk Jakarta setidaknya ada 225 ton/hari, yang terdiri dari : 54% sampah plastik (benda-benda yang terbuat dari plastik), 24% kayu, 14% tumbuh-tumbuhan dan daun, dan sisanya (8%) adalah karet, botol kaca/gelas, kain, dan gabus.

Akibat banyaknya sampah yang masuk ke Teluk Jakarta, kawasan perairan ini sudah ditetapkan ke dalam status *eutrofik*, atau dapat meledak sewaktu-waktu. Bentuk ledakan ini antara lain adalah munculnya berbagai macam penyakit, kematian massal biota laut, serta berbagai hal yang dapat mengancam dan berimbas langsung kepada masyarakat seperti banjir.

Menyikapi kondisi pencemaran yang semakin parah ini, kami mencoba memodelkan masalah tersebut melalui pengontrolan terhadap jumlah sampah di Teluk Jakarta, maupun jumlah sampah di sungai-sungai yang bermuara ke Teluk Jakarta.

## II. TUJUAN

Menerapkan *Quadratic Optimal Control* terhadap terhadap jumlah sampah di Teluk Jakarta, dan jumlah sampah di sungai-sungai yang bermuara ke Teluk Jakarta, yang akan dilakukan dalam 3 kasus :

1. Kasus 1: *Fixed Final State Quadratic Optimal Control*

Akan dilakukan pengontrolan terhadap jumlah sampah, sedemikian hingga banyaknya sampah di Teluk Jakarta setelah satu tahun akan berkurang 20%, sedangkan total banyaknya sampah dari 13 sungai tersebut akan berkurang 80%, dengan ongkos (usaha) yang seminimal mungkin.

2. Kasus 2 : *Free Final State Quadratic Optimal Control*

Dengan melakukan pengontrolan yang membutuhkan ongkos (usaha) yang minimal, akan terdapat berapa banyak sampah yang terdapat di Teluk Jakarta dan 13 sungai setelah satu tahun?

## III. ASUMSI – ASUMSI

Untuk membentuk persamaan state dari masalah di atas diperlukan beberapa asumsi yang akan mendasari pembentukan persamaan state tersebut.

1. Jumlah sampah yang dibuang ke sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta adalah 225 ton/hari, dan semua sampah ini masuk ke Teluk Jakarta.
2. Tidak ada sampah lain yang masuk ke Teluk Jakarta selain sampah dari sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta.
3. Jumlah sampah di Teluk Jakarta sekarang adalah jumlah sampah selama 10 tahun terakhir (rentang waktu terjadinya pencemaran yang melebihi ambang batas), dikurangi jumlah sampah yang mengurai (organik), yaitu sampah-sampah yang berupa kayu, tumbuh-tumbuhan dan daun (sebanyak 38%).
4. Penguraian sampah organik secara alamiah di Teluk Jakarta sebesar 2%/bulan.
5. Perhitungan banyaknya sampah dilakukan per bulan.

### III. PEMBAHASAN MASALAH

Berdasarkan asumsi-asumsi diatas, maka akan dibentuk persamaan state dengan variabel:

$x_1(k)$  : Banyaknya sampah di Teluk Jakarta pada bulan ke  $k$ .

$x_2(k)$  : Total banyaknya sampah dari sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta pada bulan ke  $k$ .

$y(k)$  : Jumlah total sampah (Teluk Jakarta + 13 sungai) pada bulan ke  $k$ .

$u(k)$  : Kontrol terhadap banyaknya sampah di kedua lokasi pada bulan ke  $k$ .

Selanjutnya,

❖ Jumlah sampah di Teluk Jakarta pada bulan ke- $k+1$  berasal dari jumlah sampah di Teluk Jakarta pada bulan sebelumnya, yaitu sampah yang tidak mengurai secara alamiah, yaitu sebesar 98% dan sampah yang mengalir dari sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta.

❖ Jumlah sampah di Teluk Jakarta sekarang  $x_1(0)$  adalah :

$$x_1(0) = 10 \times 365 \times 225 \times 0,62 = 509175 \text{ ton}$$

❖ Total banyaknya sampah dari sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta per bulan besarnya tetap , sehingga :

$$x_2(0) = 30 \times 225 = 6750 \text{ ton}$$

❖ Oleh karena  $x_1(0)$  jauh lebih besar dari pada  $x_2(0)$  , maka konstanta untuk kontrol bagi sampah di Teluk Jakarta dipilih cukup lebih besar dibanding konstanta untuk kontrol bagi total sampah dari sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta.

Dari asumsi dan pernyataan di atas, dibentuk persamaan state sebagai berikut :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A x(k) + B u(k) \\ y(k) &= C x(k) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (2)$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} 0,98 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 1).$$

Digunakan Indeks Performansi :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{11} x_k^T Q x_k + u_k^T R x_k$$

dengan

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = 1, \quad \text{dan} \quad x(0) = \begin{pmatrix} 509175 \\ 6750 \end{pmatrix}$$

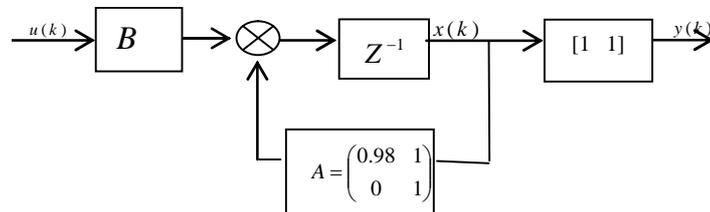
▪ **Kasus 1 (Fixed Final State)**

Akan diterapkan kontrol optimum terhadap jumlah sampah, sedemikian hingga banyaknya sampah di Teluk Jakarta setelah satu tahun akan berkurang 20%, sedangkan total banyaknya sampah dari 13 sungai akan berkurang 80%. Dengan kata lain :

$$x_1(12) = 0,8 \times 509175 = 407340 \text{ ton}$$

$$x_2(12) = 0,2 \times 6750 = 1350 \text{ ton}$$

Diagram dari persamaan state tersebut dapat dilihat pada gambar berikut.



**Persamaan Hamiltonian :**

$$H(k) = \frac{1}{2} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)) + \lambda^T(k+1) (A x(k) + B u(k))$$

✚ state equation:  $x(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial \lambda(k)} = A x(k) + B u(k) = \begin{pmatrix} 0,98 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$

✚ costate equation:

$$\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = Q x(k) + A^T \lambda(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,98 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \lambda(k+1)$$

✚ stationary condition:

$$0 = \frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = R u(k) + B^T \lambda(k+1) = u(k) + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda(k+1)$$

$$\begin{aligned} u(k) &= -B^T \lambda(k+1) \\ &= -B^T (A^T)^{N-k-1} G^{-1}(0, N) (A^N x(0) - x(12)) \end{aligned}$$

dimana :

$$G(0,12) = \sum_{i=0}^{12} A^{11-i} B R^{-1} B^T (A^T)^{11-i}$$

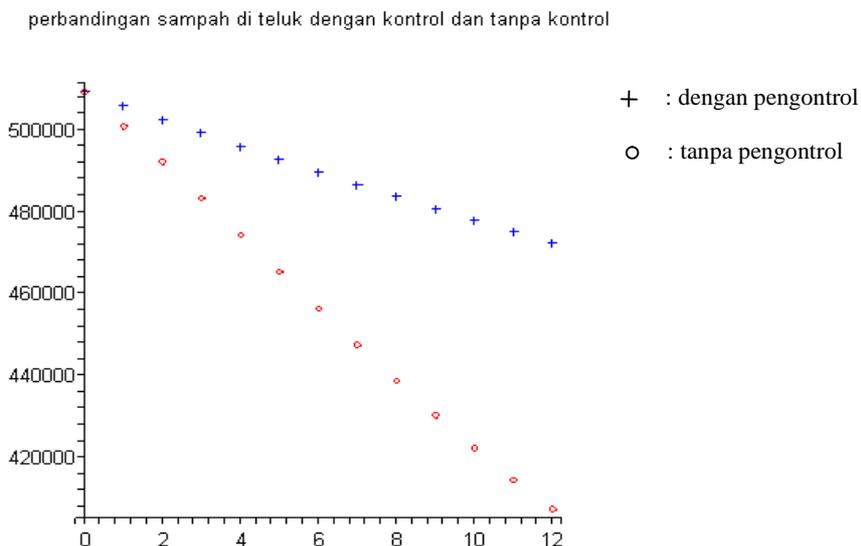
sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned}
u(0) &= -823,453125, & u(6) &= -423,2090398 \\
u(1) &= -760,069015, & u(7) &= -351,6566837 \\
u(2) &= -695,391353, & u(8) &= -278,6440753 \\
u(3) &= -629,393737, & u(9) &= -204,1414137 \\
u(4) &= -562,049232, & u(10) &= -128,1182896 \\
u(5) &= -493,3303488, & u(11) &= -50,5436732
\end{aligned}
\tag{1}$$

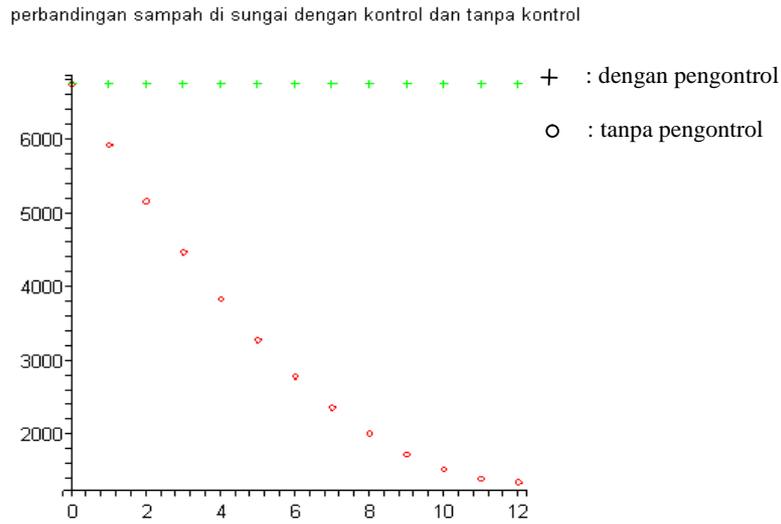
Substitusi nilai  $u(k)$  ke persamaan state sehingga akan diperoleh banyaknya sampah di Teluk Jakarta dan di sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta setelah dikontrol pada bulan ke  $k = 1, 2, \dots, 12$  sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 500800,7812 \\ 5926,546875 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1(7) \\ x_2(7) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 447447,3910 \\ 2363,104149 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1(2) \\ x_2(2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 492150,8984 \\ 5166,477860 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1(8) \\ x_2(8) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 438751,6072 \\ 2011,447465 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1(3) \\ x_2(3) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 483302,0102 \\ 4471,086507 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1(9) \\ x_2(9) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 430316,1581 \\ 1732,803390 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1(4) \\ x_2(4) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 474330,6941 \\ 3841,692770 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1(10) \\ x_2(10) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 422217,7898 \\ 1528,661976 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1(5) \\ x_2(5) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 465313,4776 \\ 3279,643538 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1(11) \\ x_2(11) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 414533,3863 \\ 1400,543686 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1(6) \\ x_2(6) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 456326,8694 \\ 2786,313189 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x_1(12) \\ x_2(12) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 407340,0003 \\ 1350,000013 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

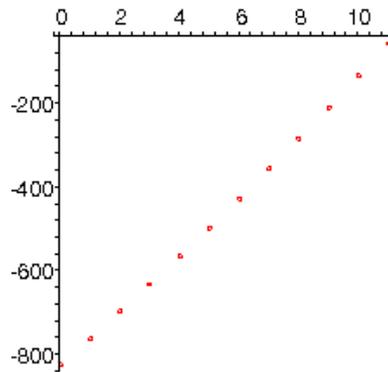
Perbandingan hasil pengontrolan dan tanpa pengontrolan dapat disajikan dalam gambar berikut:



Gambar 1. Grafik perbandingan jumlah sampah di Teluk Jakarta  
Dengan pengontrol dan tanpa pengontrol



Gambar 2. Grafik perbandingan jumlah sampah di sungai  
Dengan pengontrol dan tanpa pengontrol



Gambar 3. Grafik Kontrol  $u(k)$

k	u(k)	I	J	J-I	K	L	L-K
		x1(k) dgn kontrol	x1(k) tanpa kontrol		x2(k) dgn kontrol	x2(k) tanpa kontrol	
0	-823.4531250	509175.0000	509175.0000	0.0000	6750.000000	6750	0.0000
1	-760.0690150	500800.7812	505741.5000	4940.7188	5926.546875	6750	823.453125
2	-695.3913530	492150.8984	502376.6700	10225.7716	5166.477860	6750	1583.522140
3	-629.3937370	483302.0102	499079.1366	15777.1264	4471.086507	6750	2278.913493
4	-562.0492320	474330.6941	495847.5539	21516.8598	3841.692770	6750	2908.307230
5	-493.3303488	465313.4776	492680.6028	27367.1252	3279.643538	6750	3470.356462
6	-423.2090398	456326.8694	489576.9907	33250.1213	2786.313189	6750	3963.686811
7	-351.6566837	447447.3910	486535.4509	39088.0599	2363.104149	6750	4386.895851
8	-278.6440753	438751.6072	483554.7419	44803.1347	2011.447465	6750	4738.552535
9	-204.1414137	430316.1581	480633.6471	50317.4890	1732.803390	6750	5017.196610
10	-128.1182896	422217.7898	477770.9742	55553.1844	1528.661976	6750	5221.338024
11	-50.5436732	414533.3863	474965.5547	60432.1684	1400.543686	6750	5349.456314
12		407340.0003	472216.2436	64876.2433	1350.000013	6750	5399.999987

### **Interpretasi Hasil Data**

Pada awal bulan ke-1, dengan pengontrol  $-823,453125$  banyak sampah di teluk Jakarta adalah  $500800,7812$  ton, sedangkan jika tanpa pengontrolan adalah  $505741,5$  ton. Berarti dengan adanya pengontrolan terjadi penurunan jumlah sampah di Teluk Jakarta yang cukup signifikan, yaitu sebesar  $4940,72$  ton. Sedangkan pada bulan kedua terjadi penurunan jumlah sampah sebesar  $10225.7716$  ton. Hal ini terus berlanjut sampai mencapai angka  $64876.2433$  ton pada akhir tahun.

Dari data tersebut, kita peroleh penurunan jumlah sampah rata-rata tiap bulan sebelum dilakukan kontrol di Teluk Jakarta sebesar  $0,6049\%$  atau sekitar  $7,26\%$  setahun, sedangkan setelah dilakukan kontrol, penurunan sampah per bulan rata-rata sebesar  $1,842302\%$  atau sekitar  $20\%$  setahun. Dari angka penurunan tersebut, tampak bahwa tanpa dilakukan kontrol dari pemerintah, kebersihan di Teluk Jakarta baru akan terealisasi pada 14 tahun kedepan, sedangkan dengan dilakukan pengontrolan melalui berbagai upaya pemerintah yang berkesinambungan, dapat mempercepat penurunan jumlah sampah di Teluk Jakarta, sehingga dapat dicapai Teluk Jakarta yang bersih dalam 5 tahun yang akan datang.

Kondisi yang baik juga akan terjadi di 13 sungai yang menuju Teluk Jakarta. Pada awal bulan ke-1, dengan pengontrol  $-823,453125$  banyak sampah di 13 sungai adalah  $505741.5$  ton, sedangkan jika tanpa pengontrolan adalah  $6750$  ton. Berarti dengan adanya pengontrolan terjadi penurunan jumlah sampah di Teluk Jakarta yang cukup signifikan, yaitu dari tanpa penurunan sebelum ada pangontrol, menjadi sebesar  $823,4531$  ton. Sedangkan pada bulan kedua, dengan pengontrol terjadi penurunan jumlah sampah sebesar  $760,0690$  ton. Hal ini terus berlanjut hingga sampah di 13 sungai mencapai angka  $1350$  ton pada akhir tahun.

Dari data tersebut, kita peroleh penurunan jumlah sampah rata-rata tiap bulan sebelum dilakukan kontrol di 13 sungai sebesar  $0\%$ , sedangkan setelah dilakukan kontrol, penurunan sampah per bulan rata-rata sebesar  $12,4939\%$  atau sekitar  $80\%$  setahun. Dari angka penurunan tersebut, tampak bahwa tanpa dilakukan kontrol yang baik, kebersihan di 13 sungai tidak akan terwujud, sedangkan dengan dilakukan pengontrolan yang berkesinambungan, dapat mempercepat penurunan jumlah sampah di 13 sungai, sehingga dapat dicapai sungai yang bersih dalam kurang dari 2 tahun kedepan.

#### ▪ **Kasus 2 (*Free Final State*)**

Akan diterapkan kontrol optimum terhadap jumlah sampah di kedua tempat, dan dilihat bagaimana hasil pengontrolan tersebut dalam waktu satu tahun.

Digunakan Indeks Performansi:

$$J = \frac{1}{2} \bar{x}^T(N)S(N)\bar{x}(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [\bar{x}^T(k)Q\bar{x}(k) + u^T(k)Ru(k)]$$

dengan  $S(12) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2000 \end{bmatrix}$ ,  $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , dan  $R = [200000]$ .

Formulasi kontrol:

$$u(k) = -R^{-1}B^T S(k+1)[I + BR^{-1}B^T S(k+1)]^{-1} Ax(k)$$

dengan  $S(k)$  adalah solusi persamaan Riccati:

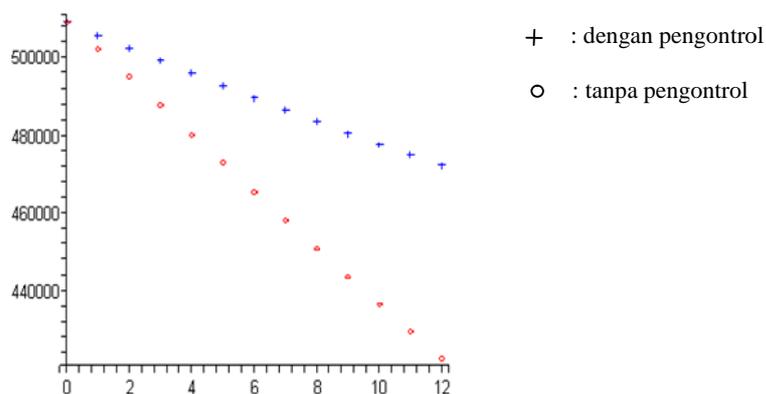
$$S(k) = Q + A^T S(k+1)[I + BR^{-1}B^T S(k+1)]^{-1} A$$

Maka diperoleh:

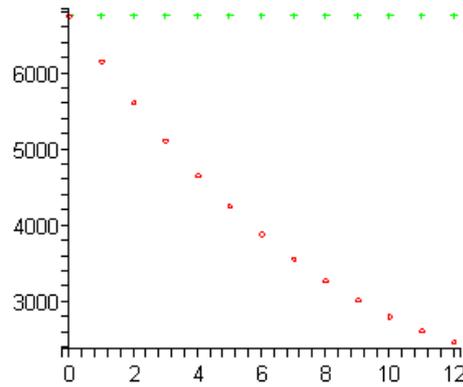
$k$	$u(k)$	$\bar{x}(k)$
0	$u0 := [-593.6163701]$	$x0 := \begin{bmatrix} 509175 \\ 6750 \end{bmatrix}$
1	$u1 := [-544.6841435]$	$x1 := \begin{bmatrix} 5.021798018 \cdot 10^5 \\ 6156.383630 \end{bmatrix}$
2	$u2 := [-497.5013267]$	$x2 := \begin{bmatrix} 4.950244845 \cdot 10^5 \\ 5611.699486 \end{bmatrix}$
3	$u3 := [-452.0698466]$	$x3 := \begin{bmatrix} 4.877506863 \cdot 10^5 \\ 5114.198159 \end{bmatrix}$
4	$u4 := [-408.3900825]$	$x4 := \begin{bmatrix} 4.803974517 \cdot 10^5 \\ 4662.128312 \end{bmatrix}$
5	$u5 := [-366.4610969]$	$x5 := \begin{bmatrix} 4.730012905 \cdot 10^5 \\ 4253.738230 \end{bmatrix}$

6	$u6 := [-326.2808605]$	$x6 := \begin{bmatrix} 4.655962363 \cdot 10^5 \\ 3887.277133 \end{bmatrix}$
7	$u7 := [-287.8464631]$	$x7 := \begin{bmatrix} 4.582139035 \cdot 10^5 \\ 3560.996272 \end{bmatrix}$
8	$u8 := [-251.1543180]$	$x8 := \begin{bmatrix} 4.508835429 \cdot 10^5 \\ 3273.149809 \end{bmatrix}$
9	$u9 := [-216.2003553]$	$x9 := \begin{bmatrix} 4.436320959 \cdot 10^5 \\ 3021.995491 \end{bmatrix}$
10	$u10 := [-182.9802080]$	$x10 := \begin{bmatrix} 4.364842474 \cdot 10^5 \\ 2805.795136 \end{bmatrix}$
11	$u11 := [-151.4893870]$	$x11 := \begin{bmatrix} 4.294624764 \cdot 10^5 \\ 2622.814928 \end{bmatrix}$
12		$x12 := \begin{bmatrix} 4.225871055 \cdot 10^5 \\ 2471.325541 \end{bmatrix}$

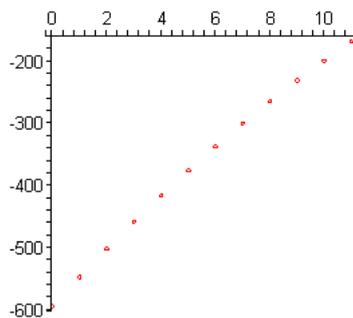
Perbandingan hasil pengendalian dan tanpa pengendalian dapat disajikan dalam gambar berikut:



Gambar 4. Grafik perbandingan jumlah sampah di Teluk Jakarta dengan pengontrol dan tanpa pengontrol, untuk free final state.



Gambar 5. Grafik perbandingan jumlah sampah di 13 sungai dengan pengontrol dan tanpa pengontrol, untuk free final state.



Gambar 6. Grafik Kontrol  $u(k)$

#### IV. KESIMPULAN

Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mengurangi pencemaran di Teluk Jakarta adalah melakukan pengontrolan dengan metode *Quadratic Optimal Control* terhadap jumlah sampah baik di Teluk Jakarta maupun di sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta.

❖ *Fixed Final State Quadratic Optimal Control*

Dengan melakukan usaha pengontrolan pada bulan kesatu sampai bulan 12 berturut-turut sebesar pada (1) dan pengontrolan terhadap sampah di Teluk Jakarta 6 kali lebih besar daripada pengontrolan terhadap sampah di 13 sungai, maka target untuk mengurangi sampah di Teluk Jakarta sebesar 20%, dan di 13 sungai sebesar 80% dalam satu tahun akan tercapai.

❖ *Free Final State Quadratic Optimal Control*

.....

Usaha pengontrolan yang dimaksud di atas adalah usaha-usaha yang dilakukan oleh Pemerintah maupun masyarakat untuk mengurangi jumlah sampah yang sudah terlanjut ada di Teluk Jakarta, misalnya pengerukan sampah yang dapat didaur ulang, maupun usaha untuk

mengurangi jumlah sampah yang berasal dari sungai-sungai yang bermuara di Teluk Jakarta antara lain dengan melaksanakan program Kali Bersih, memaksimalkan kegiatan 3R (*reduce, reuse, recycle*), dan lain-lain.

## V. DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Lewis, F.L., and Syrmos, V.L., "*Optimal Control Second Edition*", New York: Wiley, 1995.
- [2]. Ogata, K., "*Modern Control Engineering Third Edition*", London: Prentice Hall, 1997.
- [3]. Junaedy, E., "*Empat Juta Orang membuang sampah ke Teluk Jakarta*", [www.beritabumi.co.id](http://www.beritabumi.co.id). 16 mei 2007.