TEORI KONTROL ROBUST

TUGAS

Oleh

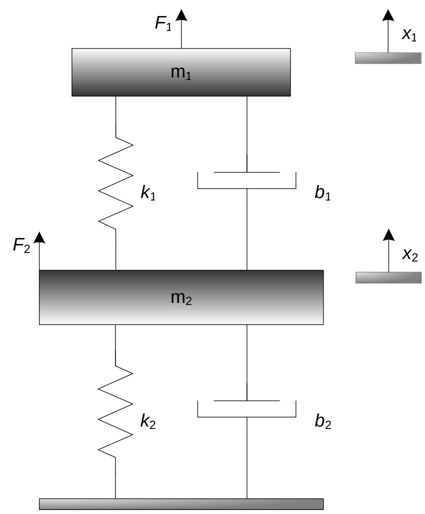
RIRIN SISPIYATI
NIM : 20106003
Program Studi Matematika

INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
2009

SISTEM MASSA PEGAS

1. Permasalahan

Suatu sistem massa pegas dengan redaman dideskripsikan seperti pada Gambar1 :



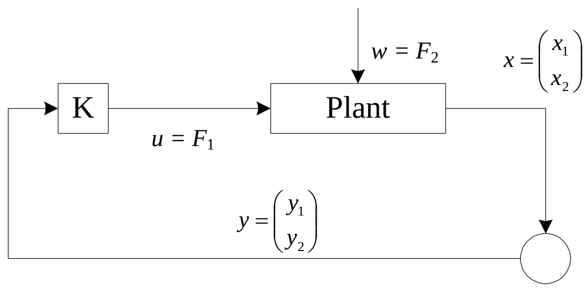
Gambar 1.

dimana:

- m_1, m_2 adalah massa benda pertama dan kedua
- k_1, k_2 adalah konstanta pegas benda pertama dan kedua
- b_1, b_2 adalah konstanta redaman pertama dan kedua

Bila $F_1 = u$ adalah input untuk kontrol dan $F_2 = w$ gangguan dari luar (*disturbance*) dimana F_1 dapat mengontrol gerakan massa benda 1 dan benda 2 yang diakibatkan oleh gangguan F_2, maka x_1 dan x_2 menyatakan kedudukan benda pertama dan benda kedua setelah mendapat kontrol.

Dari sistem massa pegas dengan redaman pada Gambar 1, dapat dibentuk suatu model kontrol dalam bentuk blok diagram, seperti pada Gambar 2 berikut:



Gambar 2.

Dengan menerapkan hukum kedua Newton dan hukum Hooke pada Gambar 1 diperoleh sistem persamaan:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{x}_1 &= b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1x_1 + k_2x_2 + F_1 \\
m_2\ddot{x}_2 &= b_1\dot{x}_1 - (b_1 + b_2)\dot{x}_2 + k_1x_1 + (k_1 + k_2)x_2 + F_2
\end{aligned}
$$

Definisikan $x_3 = \dot{x}_1$ dan $x_4 = \dot{x}_2$, sehingga

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_3 &= -\frac{k_1}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{b_1}{m_1}x_3 + \frac{b_1}{m_1}x_4 + \frac{F_1}{m_1} \\
\dot{x}_4 &= \frac{k_1}{m_2}x_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_2}x_2 + \frac{b_1}{m_2}x_3 - \frac{b_1 + b_2}{m_2}x_4 + \frac{F_2}{m_2}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Sehingga berdasarkan sistem persamaan 1.1, didapatkan persamaan *state space*nya yaitu:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 \\
-\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\
\frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1 + k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1 + b_2}{m_2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} +
\begin{bmatrix}
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\frac{1}{m_1} & 0 \\
0 & \frac{1}{m_2}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Dimana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1 + k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1 + b_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Bila $G(s)$ adalah fungsi tranfer dari (F_1, F_2) ke (x_1, x_2), maka

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 0$$

Sehingga sistem dinamik dari sistem massa pegas dengan redaman dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Dan fungsi transfernya yaitu:

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Substitusikan nilai $k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ b_1 = 0.2,\ b_2 = 0.1,\ m_1 = 1,$ dan $m_2 = 2$ pada persamaan (1.2) sehingga diperoleh

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -0.2 & 0.2 \\ 0.5 & -2.5 & 0.1 & -0.15 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Digunakan coprime factorization untuk memperoleh fungsi transfer G setelah feedback dan Pengontrol K

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Definisikan sistem:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

Pilih F sehingga $A + BF$ stabil

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = (A + BF)x + Bu \qquad ; v = u - Fx \\
&u = Fx + v \\
&y = (C + DF)x + Dv
\end{aligned}$$

Sehingga
Transfer function dari v ke u

$$M(s) = \begin{pmatrix} A + BF & B \\ F & I \end{pmatrix}$$

Transfer function dari v ke y

$$N(s) = \begin{pmatrix} A + BF & B \\ C + DF & D \end{pmatrix}$$

diperoleh

$$G = NM^{-1}$$

Pilih L sehingga $A+LC$ stabil

$$X(s) = \begin{pmatrix} A + LC & L \\ F & D \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad M(s) = \begin{pmatrix} A + LC & -B - LD \\ F & I \end{pmatrix}$$

$$K = XY^{-1}$$

2. Program Matlab

```
% Sistem Pegas Massa dengan Redaman
% Tugas Teori Kontrol Robust
% Ririn Sispiyati
% 20106003

clear all;
close all;
clc;

clear all; close all; clc;
%*** Input Massa Benda, Konstanta Pegas Benda, dan Konstanta Redaman
***
k1 = 1;         %kontanta pegas 1
k2 = 4;         %kontanta pegas 2
b1 = 0.2;       %kontanta redaman 1
b2 = 0.1;       %kontanta redaman 2
m1 = 1;         %massa benda 1
m2 = 2;         %massa benda 2
w = logspace(-1,1,200);
disp('Sistem Pegas Massa dengan Redaman');

%*** Menampilkan Matrik A, B, C, D, dan G ***
A=[0 0 1 0; 0 0 0 1; -(k1/m1) (k1/m1) -(b1/m1) b1/m1; k1/m2 -
(k1+k2)/m2 b1/m2 -(b1+b2)/m2]
B=[0 0;0 0; 1/m1 0; 0 1/m2]
C=[1 0 0 0;0 1 0 0]
D=[0 0;0 0]
disp('Matriks G');
G = pck(A,B,C,D)    %matriks G

% *** nilai eigen dari A ***
disp('Nilai Eigen(real)dari Matrik A');
s = real(eig(A))    %nilai eigen real dari A

% *** fungsi respon frekuensi ***
Gf = frsp(G,w);
% *** mencari nilai singular pada tiap frekuensi ***
[u1,s1,v1]=vsvd(Gf);

figure(1)
vplot('liv,lm',s1), grid
title('plot nilai singular terhadap frekuensi')
xlabel('frekuensi (rad/sec)')
ylabel('nilai singular')

% *** Pilih F dan L(H) ***
F=-place(A,B,[-1,-2,-3,-4])
L=-place(A',C',[-1,-2,-3,-4]) %sama dengan H
```

```
% *** Tranfser Fungsi ***
Xs=pck(A+L'*C,L',F,D)
Ys=pck(A+L'*C,-B-L'*D,F,eye(2))
Ms=pck(A+B*F,B,F,eye(2))
Ns=pck(A+B*F,B,C+D*F,D)

M=minv(Ms);
Gs=mmult(Ns,M)   % G yang stabil

Y=minv(Ys);
K=mmult(Xs,Y)  % Pengontrol

[Ag,Bg,Cg,Dg]=unpck(Gs);
[Ak,Bk,Ck,Dk]=unpck(K);

% *** Fungsi transfer dari G setelah dikontrol ***
Gt=tf(ss(Ag,Bg,Cg,Dg))
% *** Fungsi transfer dari K ***
Kt=tf(ss(Ak,Bk,Ck,Dk))

% *** Fungsi Transfer feedback ***
Loop=feedback(Gt,Kt);
Loops=ss(tf(Loop));
[Ab,Bb,Cb,Db]=branch(Loops);

% *** Bode Plot dari Plant G ***
figure(2)
bode(A,B,C,D,1,w)
title('Bode Diagram Plant G sebelum dikontrol')

figure(3)
bode(Ab,Bb,Cb,Db,1,w)
title('Bode Diagram Plant G sesudah dikontrol')
```

3. Output Program Matlab

3.1 Fungsi Transfer

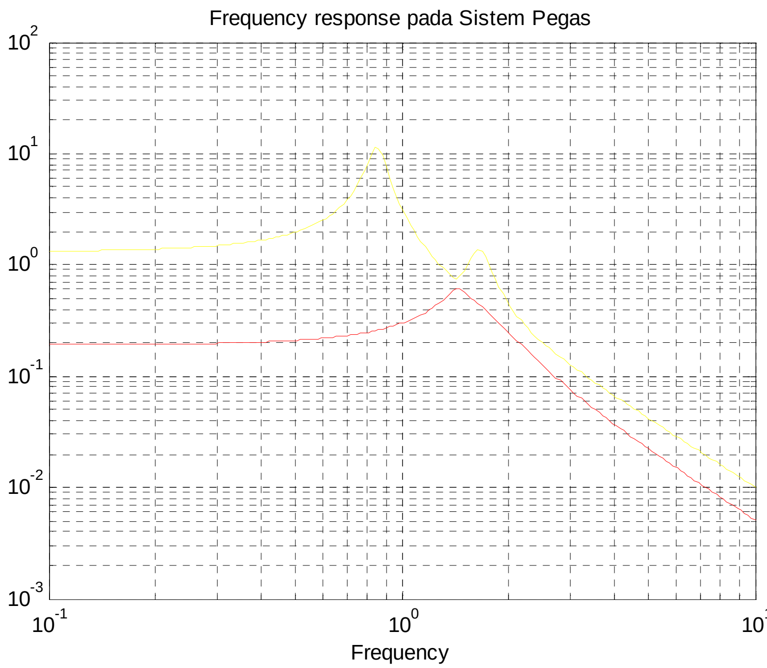
Dari program Matlab, kita dapatkan fungsi transfer G(s) sebelum dikontrol

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -0.2 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2.5 & 0.1 & -0.15 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fungsi transfer sesudah dikontrol (G)

$$G = NM^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 0 & -3 & -1 & -4.8 & -0.2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -5 & 0.5 & -3.5 & -0.1 & -4.8 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0.2 & 0.2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2.5 & 0.1 & -0.1 & 0 & -0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

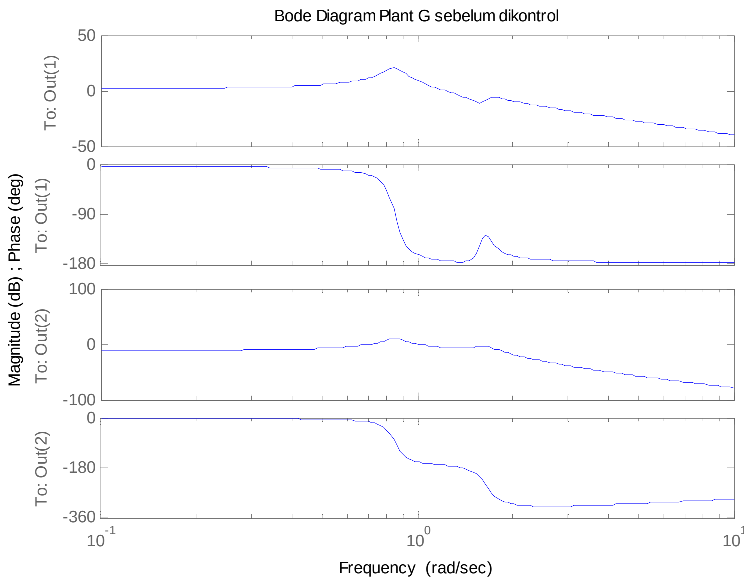
3.2 Frequency Response

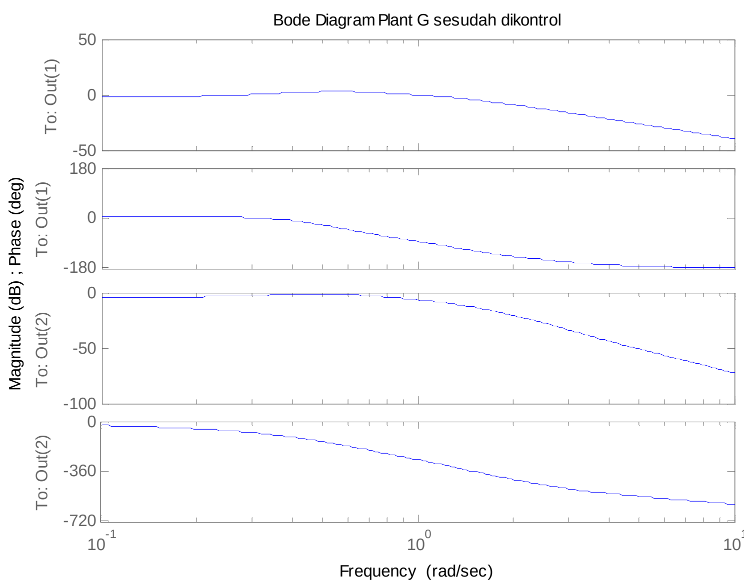


Gambar 3.

Norm H_∞ dari matriks transfer adalah $\|G(s)\|_\infty = 11.47$ yang merupakan puncak nilai singular terbesar pada Gambar 3 dengan frekuensi 0.8483.
Lower bound Norm = 11.4704
Upper bound Norm = 11.4715

3.3 Bode Diagram





4. Kesimpulan

Dari Bode Diagram Plant *G* sebelum dikontrol dan sesudah dikontrol terdapat perbedaan. Dengan menggunakan pengontrol, akan lebih cepat stabil.