

MAKALAH

KONTROL H_2 DAN KONTROL H_∞ SERTA APLIKASINYA DALAM SISTEM MASSA PEGAS

**KARTIKA YULIANTI (20106010)
RIRIN SISPIYATI (20106003)**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG
2007**

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Efisiensi dan efektivitas suatu sistem yang dinamis selalu menjadi hal yang terus dikembangkan dengan berbagai pendekatan yang memungkinkan untuk menghasilkan produktivitas yang lebih baik dari waktu ke waktu. Tujuan tersebut dimungkinkan bila sebuah sistem berada dalam kondisi yang stabil melalui penerapan sistem kontrol yang memadai. Teori Kontrol Robust menjadi salah satu solusi yang memungkinkan kita untuk dapat menetapkan sebuah pengontrol yang efektif.

Terdapat dua macam permasalahan utama dalam kontrol robust, yaitu masalah analisis dan sintesis. Dalam masalah analisis, pengontrol yang telah diperoleh, dilakukan pemeriksaan terhadap sinyal-sinyal terkontrolnya (tracking error, sinyal pengontrol), apakah memenuhi sifat-sifat yang diinginkan terhadap semua noise, gangguan dan ketidakpastian model yang diperkenankan.

Sementara pada masalah sintesis, yang dilakukan adalah mendesain sebuah pengontrol dari suatu sistem dinamik sedemikian hingga sinyal-sinyal terkontrolnya memenuhi sifat-sifat yang diinginkan terhadap semua noise, gangguan dan ketidakpastian model yang diperkenankan.

Permasalahan sintesis dapat berupa kontrol optimal H_2 dan H_∞ . Kontrol optimal H_2 bertujuan untuk merancang suatu pengontrol K yang dapat menstabilkan sebuah sistem dengan meminimumkan norm H_2 dari matriks

transfer dari w ke z (T_{zw}). Sedangkan kontrol optimal H_∞ bertujuan untuk merancang suatu pengontrol K yang dapat menstabilkan sebuah sistem dengan cara membuat norm infinite matriks transfer dari w ke z (T_{zw}) lebih kecil dari suatu bilangan (γ). Ada dua rumusan masalah pada kontrol H_∞ yaitu kontrol optimal dan kontrol suboptimal. Dalam prakteknya pengontrol suboptimal lebih banyak digunakan karena pengontrol ini lebih mudah diperoleh dan bahkan memiliki sifat yang lebih baik daripada pengontrol optimalnya. Dalam makalah ini akan dilakukan perbandingan antara kontrol optimal H_2 dan H_∞ sehingga jika diaplikasikan pada permasalahan kehidupan sehari-hari, akan didapatkan suatu pengontrol yang lebih optimal menstabilkan sistem.

1.2 Tujuan

Tujuan dari penyusunan makalah ini adalah:

1. Menentukan pengontrol H_2 dan H_∞
2. Membandingkan kontrol H_2 dan H_∞
- 3.

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Stabilitas Internal dan Stabilitas Input/Output

Misalkan K pengontrol stabil untuk sistem G dimana

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right], \quad K(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right]$$

dapat distabilkan dan realisasinya terdeteksi. Maka stabilitas internal menjamin

$$T_{zw} = F_l(G, K) \in \mathbf{RH}_\infty.$$

Lemma 2.1 *Misalkan realisasi-realisasi untuk G dan K dapat distabilkan dan terdeteksi. Maka hubungan Feedback $T_{zw} = F_l(G, K)$ dari realisasi untuk G dan K adalah*

(a) *terdeteksi, jika $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ mempunyai rank kolom penuh untuk*

setiap $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$;

(b) *dapat distabilkan, jika $\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ mempunyai rank kolom penuh*

untuk setiap $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Lebih lanjut, jika (a) dan (b) berlaku keduanya, maka K adalah pengontrol stabil internal jika dan hanya jika $T_{zw} = F_l(G, K) \in \mathbf{RH}_\infty$

Bukti

Misalkan persamaan ruang keadaan untuk *loop* tertutup adalah :

$$F_l(G, K) = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 \hat{D} L_1 C_2 & B_2 L_2 \hat{C} & B_1 + B_2 \hat{D} L_1 D_{21} \\ \hat{B} L_1 C_2 & \hat{A} + \hat{B} L_1 D_{22} \hat{C} & \hat{B} L_1 D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} L_2 \hat{D} C_2 & D_{12} L_2 \hat{C} & D_{11} + D_{12} \hat{D} L_1 D_{21} \end{array} \right]$$

$$=: \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right]$$

dimana $L_1 := (I - D_{22} \hat{D})^{-1}$, $L_2 := (I - \hat{D} D_{22})^{-1}$.

Asumsikan $F_l(G, K)$ tidak terdeteksi pada $(x', y)'$ dan mode $\text{Re } \lambda \geq 0$;

Maka dengan menggunakan tes *PBH* didapat

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

dengan penyederhanaan didapat

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{D} L_1 C_2 x + L_2 \hat{C} y \end{bmatrix} = 0.$$

dan

$$\hat{B} L_1 (C_2 x + D_{22} \hat{C} y) + \hat{A} y - \lambda y = 0$$

Kemudian jika

$$\begin{bmatrix} A - \lambda I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$$

mempunyai rank kolom penuh, maka $x=0$ dan $\hat{C}y=0$. Hal ini mengakibatkan $\hat{C}y=\lambda y$. Karena terdeteksi, maka $y=0$. Hal ini kontradiksi dengan asumsi sebelumnya. Jadi bagian (a) telah terbukti, dan bagian (b) hasilnya ganda.

2.2 Controllability dan Observability System

Definisi 2.2 Sistem dinamik yang didefinisikan pada persamaan (2.1) atau pasangan (A, B) dikatakan **terkontrol** (*controllable*), jika untuk setiap keadaan awal $x(0) = x_0$, $t_1 > 0$ dan keadaan akhir x_1 , terdapat input $u(\square)$ sedemikian sehingga solusi persamaan (2.1) memenuhi $x(t_1) = x_1$. Jika tidak, sistem dari pasangan (A, B) dikatakan **tidak terkontrol** (*uncontrollable*).

Teorema 2.3 Pernyataan berikut adalah ekuivalen:

(i) (A, B) terkontrol.

(ii) Matriks

$$W_c(t) := \int_0^t e^{At} B B^* e^{A^*t} dt$$

adalah definit positif untuk suatu $t > 0$.

(iii) Matriks terkontrol

$$C = \begin{bmatrix} B \\ AB \\ A^2B \\ \vdots \\ A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

mempunyai rank baris penuh = n .

Definisi 2.4 Suatu sistem dinamik tanpa paksaan $\dot{x} = Ax$ dapat dikatakan **stabil**, jika untuk setiap nilai-nilai eigen dari matriks A berada di bidang sebelah kiri

sumbu imajiner, yaitu $\text{Re } \lambda(A) < 0$. Suatu matriks A yang memenuhi sifat ini disebut stabil.

Definisi 2.5 Persamaan sistem dinamik (2.1) atau pasangan (A, B) , dapat distabilkan jika terdapat *state feedback* $u = Fx$ sedemikian sehingga sistem menjadi stabil, dimisalkan $A + BF$ adalah stabil.

Teorema 2.6 *Pernyataan berikut adalah ekuivalen:*

- (i) (A, B) dapat distabilkan.
- (ii) $\exists F \ni A + BF$ stabil.

Teorema 2.7 *Pernyataan berikut adalah ekuivalen:*

- (i) (A, B) stabil.
- (ii) Matriks $[A - \lambda I \ B]$ mempunyai rank baris penuh untuk setiap $\text{Re } \lambda < 0$.

Definisi 2.8 Sistem dinamik yang didefinisikan pada persamaan (2.1) dan (2.2) atau oleh pasangan (C, A) dikatakan **teramati** (*observable*) jika untuk setiap $t_1 > 0$, keadaan awal $x(0) = x_0$ dapat diselesaikan dari input $u(t)$ awal dan output $y(t)$ dan pada interval $[0, t_1]$. Jika tidak, maka sistem (C, A) dikatakan **tak teramati** (*unobservable*).

Teorema 2.9 *Pernyataan berikut adalah ekuivalen:*

- (i) (C, A) teramati.

(ii) *Matriks*

$$W_c(t) := \int_0^t e^{At} C^* C e^{A^*t} dt$$

adalah definit positif untuk suatu $t > 0$.

(iii) *Matriks teramati*

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

mempunyai rank kolom penuh = n .

Definisi 2.10 Sistem atau pasangan (C, A) dikatakan **terdeteksi** (*detectable*) jika $A + LC$ stabil untuk suatu L .

Teorema 2.11 Pernyataan berikut adalah ekuivalen:

- (i) (C, A) terdeteksi.
- (ii) $\exists L \ni A + LC$ stabil.

Teorema 2.12 Pernyataan berikut adalah ekuivalen:

- (i) (C, A) terdeteksi.
- (ii) Matriks $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ mempunyai rank kolom penuh untuk setiap $\text{Re } \lambda \geq 0$.

2.3 Pole Placement dan Canonical Forms

Anggap bahwa suatu sistem dinamika *MIMO* (*Mult-Input Multi-Output*) didefinisikan oleh

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du,\end{aligned}$$

dan misalkan u adalah kontrol *state feedback* dengan

$$u = Fx + v$$

Sistem loop tertutup ini seperti yang ditunjukkan pada Gambar 3.1 berikut, dan persamaan sistem loop tertutupnya adalah

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B(Fx + v) = (A + BF)x + Bv \\ y &= Cx + D(Fx + v) = (C + DF)x + Dv.\end{aligned}$$

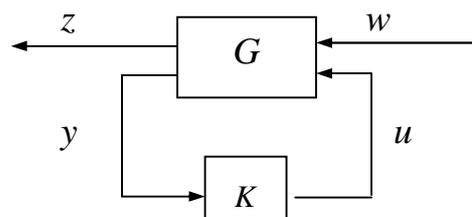
dimana :

- A = matriks $n \times n$: matriks *state*
- B = matriks $n \times m$: matriks input
- C = matriks $r \times n$: matriks output

$$D = \text{matriks } r \times m$$

2.4 Kontrol H_2

Standard H_2 Problem



Sistem dinamik pada gambar 1 adalah

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w + D_{22} u\end{aligned}$$

Realisasi fungsi transfer sistem di atas adalah

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $D_{22} = 0$, sehingga G_{22} proper ketat.

Selain itu, diasumsikan juga $D_{11} = 0$, hal tersebut untuk menjamin bahwa masalah

H_2 properly posed. Sehingga fungsi transfer menjadi

$$G = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

Dibuat beberapa asumsi tambahan, yaitu:

- (i) (A, B_2) terstabilkan dan (C_2, A) terdeteksi.
- (ii) $R_1 = D_{12}^* D_{12} > 0$ dan $R_2 = D_{21} D_{21}^* > 0$.
- (iii) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ mempunyai rank kolom penuh untuk setiap ω .
- (iv) $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ mempunyai rank baris penuh untuk setiap ω .

Asumsi pertama dibuat untuk kestabilan *output feedback* dari G . Dengan adanya asumsi ketiga, keempat dan asumsi pertama maka terjamin bahwa dua matriks Hamiltonian yang berasosiasi dengan masalah H_2 (di bawah) adalah anggota $\text{dom}(\text{Ric})$. Sedangkan asumsi kedua untuk menjamin bahwa masalah kontrol optimal H_2 adalah nonsingular.

Masalah utama kontrol H_2 adalah mencari pengontrol K yang proper dan real rational yang menstabilkan G secara internal dan meminimumkan H_2 norm dari transfer matriks T_{zw} dari w ke z .

Karena diasumsikan (i) dan (iii), maka berdasarkan Corollary 12.7, Hamiltonian matriks

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1 & -B_2 R_1^{-1} B_2^* \\ -C_1^* (I - D_{12} R_1^{-1} D_{12}^*) C_1 & -(A - B_2 R_1^{-1} D_{12}^* C_1)^* \end{bmatrix}$$

anggota $\text{dom}(\text{Ric})$ dan terlebih lagi $X_2 = \text{Ric}(H_2) \geq 0$.

Selain itu, dengan mengasumsikan (C_2, A) terdeteksi yang ekuivalen dengan

(A^*, C_2^*) terstabilkan, serta asumsi (iv), maka Hamiltonian matriks

$$J_2 = \begin{bmatrix} (A - B_1 D_{21}^* R_2^{-1} C_2)^* & -C_2^* R_2^{-1} C_2 \\ -B_1 (I - D_{21}^* R_2^{-1} D_{21}) B_1^* & -(A - B_1 D_{21}^* R_2^{-1} C_2)^* \end{bmatrix}$$

juga anggota $\text{dom}(\text{Ric})$ dan $Y_2 = \text{Ric}(J_2) \geq 0$.

Definisikan

$$F_2 = -R_1^{-1} (B_2^* X_2 + D_{12}^* C_1), \quad L_2 = -(Y_2 C_2^* + B_1 D_{21}^*) R_2^{-1}$$

dan

$$\begin{aligned} A_{F_2} &= A + B_2 F_2, & C_{1F_2} &= C_1 + D_{12} F_2 \\ A_{L_2} &= A + L_2 C_2, & B_{1L_2} &= B_1 + L_2 D_{21} \\ \hat{A}_2 &= A + B_2 F_2 + L_2 C_2 \end{aligned}$$

$$G_c(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{F_2} & I \\ \hline C_{1F_2} & 0 \end{array} \right], \quad G_f(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{L_2} & B_{1L_2} \\ \hline I & 0 \end{array} \right]$$

Untuk membuktikan teorema 2.14 diperlukan Lemma berikut:

Lemma 2.13 Misalkan $U, V \in RH_\infty$ didefinisikan sebagai

$$U = \left[\begin{array}{c|c} A_{F_2} & B_2 R_1^{-1/2} \\ \hline C_{1F_2} & D_{12} R_1^{-1/2} \end{array} \right], \quad V = \left[\begin{array}{c|c} A_{L_2} & B_{1L_2} \\ \hline R_1^{-1/2} C_2 & R_1^{-1/2} D_{21} \end{array} \right]$$

Maka U adalah sebuah inner dan V adalah co-inner, $\tilde{U}G_c \in RH_2^\perp$ dan

$$G_f \tilde{V} \in RH_2^\perp.$$

Bukti Pembuktian Lemma tersebut menggunakan manipulasi biasa pada realisasi state space.

$$\tilde{U}(s) = U^T(-s) = R_1^{-1/2} B_2^* (-sI - A_{F2}^*)^{-1} C_{1F2}^* + R_1^{-1/2} D_{12}^*$$

$$\tilde{U}(s) = \left[\begin{array}{c|c} -A_{F2}^* & -C_{1F2}^* \\ \hline R_1^{-1/2} B_2^* & R_1^{-1/2} D_{12}^* \end{array} \right]$$

Maka

$$\tilde{U}U = \left[\begin{array}{cc|c} -A_{F2}^* & -C_{1F2}^* C_{1F2} & -C_{1F2}^* D_{12} R_1^{-1/2} \\ 0 & A_{F2} & B_2 R_1^{-1/2} \\ \hline R_1^{-1/2} B_2^* & R_1^{-1/2} D_{12}^* C_{1F2} & I \end{array} \right]$$

$$\tilde{U}G_c = \left[\begin{array}{cc|c} -A_{F2}^* & -C_{1F2}^* C_{1F2} & 0 \\ 0 & A_{F2} & I \\ \hline R_1^{-1/2} B_2^* & R_1^{-1/2} D_{12}^* C_{1F2} & 0 \end{array} \right]$$

Dilakukan transformasi dengan memisalkan $\tilde{x} = Px$ dengan $P = \begin{bmatrix} I & -X_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ pada

sistem-sistem di atas. Sehingga

$$\tilde{U}U = \left[\begin{array}{cc|c} P \begin{bmatrix} -A_{F2}^* & -C_{1F2}^* C_{1F2} \\ 0 & A_{F2} \end{bmatrix} P^{-1} & P \begin{bmatrix} -C_{1F2}^* D_{12} R_1^{-1/2} \\ B_2 R_1^{-1/2} \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} R_1^{-1/2} B_2^* & R_1^{-1/2} D_{12}^* C_{1F2} \end{bmatrix} P^{-1} & I \end{array} \right]$$

Karena

$$A_{F2}^* X_2 + X_2 A_{F2} + C_{1F2}^* C_{1F2} = 0$$

dan berdasarkan Lemma 12.8

$$-C_{1F2}^* D_{12} R_1^{-1/2} - X_2 B_2 R_1^{-1/2} = 0$$

maka

$$\tilde{U}U = \left[\begin{array}{cc|c} -A_{F_2}^* & 0 & 0 \\ 0 & A_{F_2} & B_2 R_1^{-1/2} \\ \hline R_1^{-1/2} B_2^* & 0 & I \end{array} \right] = I$$

Transformasi yang sama juga dilakukan pada $\tilde{U}G_c$, sehingga diperoleh

$$\tilde{U}G_c = \left[\begin{array}{cc|c} -A_{F_2}^* & 0 & -X_2 \\ 0 & A_{F_2} & I \\ \hline R_1^{-1/2} B_2^* & 0 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} -A_{F_2}^* & -X_2 \\ \hline R_1^{-1/2} B_2^* & 0 \end{array} \right] \in RH_2^\perp.$$

Dengan prinsip duality, dapat diperoleh bahwa $G_f \tilde{V} \in RH_2^\perp$ dan V adalah co-inner.

□

Teorema 2.14 Terdapat pengontrol optimal yang unik

$$K_{opt}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_2 & -L_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array} \right]$$

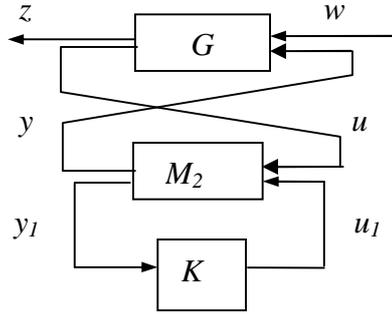
Terlebih lagi

$$\min \|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|R_1^{1/2} F_2 G_f\|_2^2 = \text{trace}(B_1^* X_2 B_1) + \text{trace}(R_1 F_2 Y_2 F_2^*).$$

Bukti Diperhatikan parameterisasi dari semua pengontrol yang dapat menstabilkan, $K(s) = F_l(M_2, Q)$, $Q \in RH_\infty$ dengan

$$M_2(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A}_2 & -L_2 & B_2 \\ \hline F_2 & 0 & I \\ -C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

dan diagram sistem berikut



Maka $T_{zw} = F_l(N, Q)$ dengan

$$N = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{F2} & -B_2 F_2 & B_1 & B_2 \\ 0 & A_{L2} & B_{1L2} & 0 \\ \hline C_{1F2} & -D_{12} F_2 & 0 & D_{12} \\ 0 & C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

dan

$$T_{zw} = G_c B_1 - UR_1^{1/2} F_2 G_f + UR_1^{1/2} QR_2^{1/2} V$$

Berdasarkan Lemma 2.13, $G_c B_1$ dan U ortogonal, sehingga

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|UR_1^{1/2} F_2 G_f - UR_1^{1/2} QR_2^{1/2} V\|_2^2$$

Karena U adalah inner, maka

$$\|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|R_1^{1/2} F_2 G_f - R_1^{1/2} QR_2^{1/2} V\|_2^2$$

Akibat keortogonalan G_f dan V , serta V adalah co-inner, maka

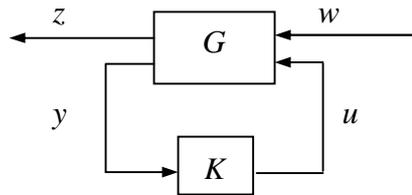
$$\|T_{zw}\|_2^2 = \|G_c B_1\|_2^2 + \|R_1^{1/2} F_2 G_f\|_2^2 + \|R_1^{1/2} QR_2^{1/2} V\|_2^2$$

Dengan mengambil $Q = 0$ akan memberikan pengontrol optimal yang unik, sehingga $K = F_l(M_2, 0)$ adalah kontrol optimal yang unik.

2.5 Kontrol H_∞

Formulasi Permasalahan

Misalkan suatu sistem dideskripsikan dengan diagram blok



Gambar 2.2 Blok Diagram

dimana *plant* G dan pengontrol K diasumsikan real rasional dan proper. Pada sistem ini diasumsikan bahwa model-model ruang keadaan G dan K dapat digunakan serta stabil dan terdeteksi.

Suatu pengontrol dikatakan dapat diterima (*admissible*) jika sistem tersebut stabil internal.

Definisi 2.15 Kontrol H_∞ Optimal: mencari semua pengontrol $K(s)$, sedemikian sehingga $\|T_{zw}\|_\infty$ minimal.

Definisi 2.16 Kontrol H_∞ Suboptimal: diberikan $\gamma > 0$, mencari semua pengontrol $K(s)$ yang dapat diterima, sedemikian sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

Pada umumnya, pengontrol optimal H_∞ tidak tunggal solusinya untuk sistem MIMO, dan sangat kompleks secara teoritis dan numerik. Hal ini berbeda

dengan pengontrol H_2 dimana pengontrol optimalnya adalah unik dan dapat diperoleh sebagai solusi dari dua persamaan Ricatti tanpa iterasi. Dalam prakteknya, pengontrol optimal tidak terlalu diperlukan. Pengontrol suboptimal, yaitu pengontrol yang sangat dekat dengan norm dengan pengontrol optimalnya, lebih mudah diperoleh dan bahkan memiliki sifat yang lebih baik daripada pengontrol optimalnya. Pembahasan selanjutnya akan lebih difokuskan pada pengontrol suboptimal.

Masalah Sederhana kontrol H_∞

Misalkan realisasi dari matriks transfer G berbentuk

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right].$$

Berikut adalah beberapa asumsi yang digunakan untuk penyederhanaan masalah sebagai berikut:

(i) (A, B_1) terkontrol dan (C_1, A) terobservasi;

(ii) (A, B_2) terstabilkan dan (C_2, A) terdeteksi;

(iii) $D_{12}^* [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I]$;

(iv) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Dua asumsi tambahan yang implisit dalam realisasi $G(s)$ yaitu $D_{11} = 0$ dan

$D_{22} = 0$.

Pengontrol-Pengontrol H_∞ Suboptimal

Pada bagian ini, akan dijelaskan syarat perlu dan cukup untuk eksistensi dari suatu pengontrol $K(s)$ yang sesuai sedemikian sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ untuk suatu γ yang diberikan. Lebih lanjut, jika syarat perlu dan cukup telah dipenuhi, akan dikarakterisasi semua pengontrol yang sesuai yang memenuhi kondisi norm.

Misalkan $\gamma_{opt} := \min \{ \|T_{zw}\|_\infty : K(s) \text{ sesuai} \}$, sebagai contoh, tingkat optimal. Maka, jelas, γ harus lebih besar dari γ_{opt} untuk eksistensi dari pengontrol-pengontrol H_∞ suboptimal.

Solusi H_∞ memenuhi dua matriks Hamiltonian berikut:

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^* - B_2 B_2^* \\ -C_1^* C_1 & -A_1^* \end{bmatrix}, \quad J_\infty := \begin{bmatrix} A^* & \gamma^{-2} C_1^* C_1 - C_2^* C_2 \\ -B_1 B_1^* & -A \end{bmatrix}$$

Teorema 2.17 *Terdapat suatu pengontrol yang dapat diterima sedemikian sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika tiga kondisi berikut terpenuhi:*

- i. $H_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ dan $X_\infty := \text{Ric}(H_\infty) \geq 0$.
- ii. $J_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ dan $Y_\infty := \text{Ric}(J_\infty) \geq 0$.
- iii. $\rho(X_\infty, Y_\infty) < \gamma^2$.

Jika ketiga kondisi ini dipenuhi, salah satu pengontrolnya adalah

$$K_{sub}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right]$$

dimana

$$\hat{A}_\infty := A + \gamma^{-2} B_1 B_1^* X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2$$

$$F_\infty := -B_2^* X_\infty, \quad L_\infty := Y_\infty C_2^*, \quad Z_\infty := (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}.$$

Untuk membuktikan teorema diatas diperlukan beberapa lemma berikut:

Lemma 2.18 Misalkan $X \in R^{n \times n}$, $Y \in R^{n \times n}$, dengan $X = X^* > 0$, dan $Y = Y^* > 0$. Misalkan pula r adalah bilangan bulat positif. Maka terdapat matriks $X_{12} \in R^{n \times r}$, $X_2 \in R^{r \times r}$ sedemikian sehingga $X_2 = X_2^*$

$$\begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^* & X_2 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{dan} \quad \begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^* & X_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

jika dan hanya jika

$$\begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} X & I_n \\ I_n & Y \end{bmatrix}^{-1} \leq n + r.$$

Bukti :

(\Leftarrow) Sesuai dengan asumsi, terdapat suatu matriks $X_{12} \in R^{n \times r}$ sedemikian sehingga $X - Y^{-1} = X_{12} X_{12}^*$. Definisikan $X_2 := I_r$, maka terbukti.

(\Rightarrow) Dengan menggunakan komplemen Schur,

$$Y = X^{-1} + X^{-1} X_{12} (X_2 - X_{12}^* X^{-1} X_{12})^{-1} X_{12}^* X^{-1}$$

Diinverskan menggunakan Lemma Inversi Matriks, memberikan

$$Y^{-1} = X - X_{12} X_2^{-1} X_{12}^*$$

Sehingga,

$$X - Y^{-1} = X_{12} X_2^{-1} X_{12}^* \geq 0$$

dan $\text{rank} (X - Y^{-1}) = \text{rank} (X_{12} X_2^{-1} X_{12}^*) \leq r$

Lemma 2.19 Terdapat pengontrol berorde r yang *admissible* dengan $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ hanya jika tiga kondisi berikut dipenuhi :

(i). Terdapat $Y_1 > 0$ sedemikian sehingga

$$AY_1 + Y_1 A^* + Y_1 C_1^* C_1 Y_1 / \gamma^2 + B_1 B_1^* - \gamma^2 B_2 B_2^* < 0 \quad (2.5)$$

(ii). Terdapat $X_1 > 0$ sedemikian sehingga

$$X_1 A + A^* X_1 + X_1 B_1 B_1^* X_1 / \gamma^2 + C_1^* C_1 - \gamma^2 C_2^* C_2 < 0 \quad (2.6)$$

$$(iii). \begin{bmatrix} X_1/\gamma & I_n \\ I_n & Y_1/\gamma \end{bmatrix} \geq 0, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} X_1/\gamma & I_n \\ I_n & Y_1/\gamma \end{bmatrix} \leq n + r$$

Bukti :

- Misalkan terdapat pengontrol berorde r , $K(s)$ sedemikian sehingga

$$\|T_{zw}\|_{\infty} < \gamma.$$

- Misalkan $K(s)$ memiliki realisasi ruang keadaan sebagai berikut:

$$K(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right]$$

Maka,

$$T_{zw} = F_l(G, K) = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 \hat{D} C_2 & B_2 \hat{C} & B_1 + B_2 \hat{D} D_{21} \\ \hline \hat{B} C_2 & \hat{A} & \hat{B} D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} \hat{D} C_2 & D_{12} \hat{C} & D_{12} \hat{D} D_{21} \end{array} \right] =: \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}$$

- Nyatakan, $R = \gamma^2 I - D_c^* D_c$ dan $\tilde{R} = \gamma^2 I - D_c D_c^*$
- Berdasarkan Lemma *Bounded Real*, terdapat $X = \begin{bmatrix} X_1 & X_{12} \\ X_{12}^* & X_2 \end{bmatrix} > 0$ sehingga

$$\tilde{X} (A_c + B_c R^{-1} D_c^* C_c) + (A_c + B_c R^{-1} D_c^* C_c)^* \tilde{X} + \tilde{X} B_c R^{-1} B_c^* \tilde{X} + C_c^* R^{-1} C_c < 0 \quad (2.7)$$

- Akibatnya,

$$X_1 A + A^* X_1 + X_1 B_1 B_1^* X_1 / \gamma^2 + C_1^* C_1 - \gamma^2 C_2^* C_2 + (X_1 B_1 \hat{D} + X_{12} \hat{B} + \gamma^2 C_2^*) (\gamma^2 I - \hat{D}^* \hat{D})^{-1} (X_1 B_1 \hat{D} + X_{12} \hat{B} + \gamma^2 C_2^*)^* < 0$$

Dapat juga ditulis,

$$X_1 A + A^* X_1 + X_1 B_1 B_1^* X_1 / \gamma^2 + C_1^* C_1 - \gamma^2 C_2^* C_2 < 0$$

- Misalkan $\tilde{Y} = \gamma^2 \tilde{X}^{-1}$ dan $\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_{12} \\ Y_{12}^* & Y_2 \end{bmatrix} > 0$. Maka,

$$(A_c + B_c R^{-1} D_c^* C_c) \tilde{Y} + \tilde{Y} (A_c + B_c R^{-1} D_c^* C_c) + \tilde{Y} C_c^* \tilde{R}^{-1} C_c \tilde{Y} + B_c R^{-1} B_c^* < 0 \quad (2.8)$$

Diperoleh,

$$AY_1 + Y_1A^* + B_1B_1^* - \gamma^2 B_2^*B_2 + Y_1C_1^*C_1Y_1/\gamma^2 + (Y_1C_1^*\hat{D}^* + Y_{12}\hat{C}^* + \gamma^2 B_2)(\gamma^2 I - \hat{D}\hat{D}^*)^{-1}(Y_1C_1^*\hat{D}^* + Y_{12}\hat{C}^* + \gamma^2 B_2)^* < 0$$

Dapat juga ditulis,

$$AY_1 + Y_1A^* + B_1B_1^* - \gamma^2 B_2^*B_2 + Y_1C_1^*C_1Y_1/\gamma^2 < 0$$

- o Berdasarkan Lemma 2.18, jika diberikan $X_1 > 0$ dan $Y_1 > 0$ maka terdapat

X_{12} dan X_2 sehingga $\tilde{Y} = \gamma^2 \tilde{X}^{-1}$ atau $\tilde{Y}/\gamma = (\tilde{X}/\gamma)^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} X_1/\gamma & X_{12}/\gamma \\ X_{12}^*/\gamma & X_2/\gamma \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1/\gamma & * \\ * & * \end{bmatrix},$$

jika dan hanya jika

$$\begin{bmatrix} X_1/\gamma & I_n \\ I_n & Y_1/\gamma \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{dan} \quad \text{rank} \begin{bmatrix} X_1/\gamma & I_n \\ I_n & Y_1/\gamma \end{bmatrix}^{-1} \leq n + r$$

Teorema 2.20 Misalkan $R \geq 0$ dan (A, R) terkontrol. Terdapat $X = X^*$ sehingga,

$$Q(X) := XA + A^*X + XRX + Q < 0 \quad ()$$

Maka terdapat suatu solusi $X_+ > X$ untuk persamaan *Ricatti*,

$$X_+A + A^*X_+ + X_+RX_+ + Q = 0 \quad ()$$

sedemikian sehingga $A + RX_+$ *antistabil*.

Teorema 2.21

Terdapat K sedemikian sehingga $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ jika dan hanya jika:

(i). Terdapat suatu solusi penstabil $X_\infty > 0$, untuk persamaan

$$X_\infty A + A^* X_\infty + X_\infty (B_1 B_1^* / \gamma^2 - B_2 B_2^*) X_\infty + C_1^* C_1 = 0$$

(ii). Terdapat suatu solusi penstabil $Y_\infty > 0$ untuk persamaan

$$AY_\infty + Y_\infty A^* + Y_\infty (C_1^* C_1 / \gamma^2 - C_2^* C_2) Y_\infty + B_1 B_1^* = 0$$

$$(iii). \begin{bmatrix} \gamma Y_\infty^{-1} & I_n \\ I_n & \gamma X_\infty^{-1} \end{bmatrix} > 0 \text{ atau } \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2.$$

Bukti :

- Dengan menerapkan Teorema 2.20 pada bagian (i) dari Lemma 2.19 maka terdapat $Y > Y_1 > 0$ sehingga,

$$AY + YA^* + YC_1^* C_1 Y / \gamma^2 + B_1 B_1^* - \gamma^2 B_2 B_2^* = 0$$

dan $A + C_1^* C_1 Y / \gamma^2$ antistabil.

Misalkan $X_\infty := \gamma^2 Y^{-1}$. Diperoleh,

$$X_\infty A + A^* X_\infty + X_\infty (B_1 B_1^* / \gamma^2 - B_2 B_2^*) X_\infty + C_1^* C_1 = 0 \quad (2.11)$$

dan,

$$A + (B_1 B_1^* / \gamma^2 - B_2 B_2^*) X_\infty = -X_\infty^{-1} (A + C_1^* C_1 X_\infty^{-1}) X_\infty = -X_\infty^{-1} (A + C_1^* C_1 Y / \gamma^2) X_\infty$$

stabil.

- Dengan menerapkan Teorema 2.20 pada bagian (ii) dari Lemma 2.19 maka terdapat $X > X_1 > 0$ sehingga,

$$XA + A^* X + XB_1 B_1^* X / \gamma^2 + C_1^* C_1 - \gamma^2 C_2^* C_2 = 0$$

dan $A + B_1 B_1^* X / \gamma^2$ antistabil.

Misalkan $Y_\infty := \gamma^2 X^{-1}$. Diperoleh,

$$AY_\infty + Y_\infty A^* + Y_\infty (C_1^* C_1 / \gamma^2 - C_2^* C_2) Y_\infty + B_1 B_1^* = 0 \quad (2.12)$$

dan $A + (C_1^* C_1 / \gamma^2 - C_2^* C_2) Y_\infty$ stabil.

- Perhatikan bahwa kondisi (iii) dari Lemma 2.19 secara otomatis memenuhi $r \geq n$, dan

$$\begin{bmatrix} \gamma Y_\infty^{-1} & I_n \\ I_n & \gamma X_\infty^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X/\gamma & I_n \\ I_n & Y/\gamma \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} X_1/\gamma & I_n \\ I_n & Y_1/\gamma \end{bmatrix} \geq 0$$

Selanjutnya dibuktikan $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$. Karena

$$\begin{bmatrix} \gamma Y_\infty^{-1} & I_n \\ I_n & \gamma X_\infty^{-1} \end{bmatrix} > 0,$$

dan $\gamma Y_\infty^{-1} > 0$ maka berdasarkan Lemma schur complement $\gamma X_\infty^{-1} > \gamma^{-1} Y_\infty$,

sehingga $I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty > 0$, jadi $(I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)$ mempunyai invers.

Definisikan $Y_{t_\infty} = (I - \gamma^{-2} X_\infty Y_\infty)^{-1} Y_\infty$. Jadi

$$\begin{aligned} \rho(X_\infty Y_\infty) &= \rho(X_\infty Y_{t_\infty} (I + \gamma^{-2} X_\infty Y_{t_\infty})^{-1}) \\ &\leq \frac{\rho(X_\infty Y_{t_\infty})}{1 + \rho(\gamma^{-2} X_\infty Y_{t_\infty})} \\ &= \gamma^2 \frac{\rho(X_\infty Y_{t_\infty})}{\gamma^2 + \rho(X_\infty Y_{t_\infty})} < \gamma^2. \end{aligned}$$

Bukti Teorema 2.17 :

o Untuk membuktikannya, cukup dengan menunjukkan bahwa pengontrol K_{sub} mengakibatkan $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

o Perhatikan bahwa fungsi transfer loop tertutup dengan K_{sub} diberikan oleh

$$T_{zw} = \left[\begin{array}{cc|c} A & B_2 F_\infty & B_1 \\ -Z_\infty L_\infty C_2 & \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty D_{21} \\ \hline C_1 & D_{12} F_\infty & 0 \end{array} \right] =: \left[\begin{array}{c|c} A_c & B_c \\ \hline C_c & D_c \end{array} \right].$$

o Definisikan,

$$P = \begin{bmatrix} \gamma^2 Y_\infty^{-1} & -\gamma^2 Y_\infty^{-1} Z_\infty^{-1} \\ -\gamma^2 (Z_\infty^*)^{-1} Y_\infty^{-1} & \gamma^2 Y_\infty^{-1} Z_\infty^{-1} \end{bmatrix}$$

Maka $P > 0$ dan $PA_c + A_c^* P + PB_c B_c^* P/\gamma^2 + C_c^* C_c = 0$.

o Perhatikan bahwa,

$$A_c + B_c B_c^* P/\gamma^2 = \begin{bmatrix} A + B_1 B_1^* Y_\infty^{-1} & B_2 F_\infty - B_1 B_1^* Y_\infty^{-1} Z_\infty^{-1} \\ 0 & A + B_1 B_1^* X_\infty/\gamma^2 + B_2 F_\infty \end{bmatrix}$$

tidak memiliki nilai karakteristik pada sumbu imajiner karena $A + B_1 B_1^* X_\infty/\gamma^2 + B_2 F_\infty$ stabil dan $A + B_1 B_1^* Y_\infty^{-1}$ antistabil.

Sehingga menurut lemma *Bounded Real*, $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$.

□

Lebih lanjut, ketika kondisi-kondisi ini benar, maka terdapat pengontrol

$$K_{sub}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ \hline F_\infty & 0 \end{array} \right]$$

dimana

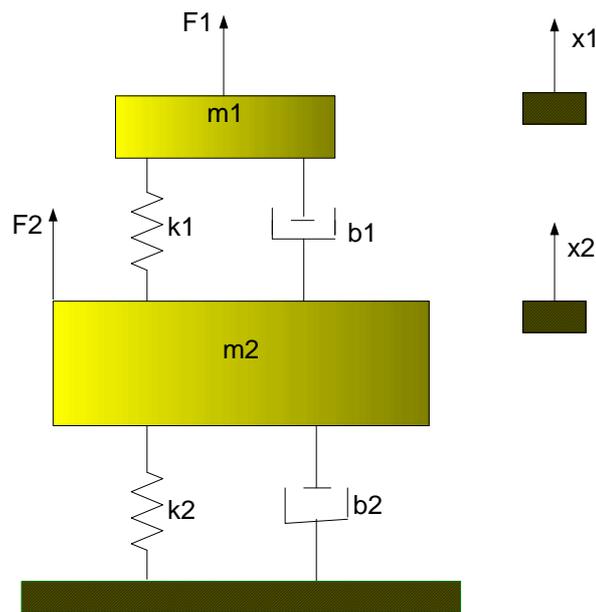
$$\begin{aligned} \hat{A}_\infty &:= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^* X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 - \\ F_\infty &:= -B_2^* X_\infty, \quad L_\infty := Y_\infty C_2^*, \quad Z_\infty := (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}. \end{aligned}$$

Pengontrol H_∞ yang ditunjukkan pada Teorema 2.17, sering disebut **pengontrol pusat** (*central controller*) atau **pengontrol entropi minimum** (*minimum entropy controller*).

BAB III APLIKASI PADA SISTEM MASSA PEGAS

Permasalahan

Suatu sistem massa pegas dengan redaman dideskripsikan seperti pada gambar berikut:



Gambar 3.1

dimana:

- m_1, m_2 adalah massa benda pertama dan kedua
- k_1, k_2 adalah konstanta pegas benda pertama dan kedua
- b_1, b_2 adalah konstanta redaman pertama dan kedua

Bila $F_1 = u$ adalah input untuk kontrol dan $F_2 = w$ gangguan dari luar (*disturbance*) dimana F_1 dapat mengontrol gerakan massa benda 1 dan benda 2 yang diakibatkan oleh gangguan F_2 , maka x_1 dan x_2 menyatakan kedudukan benda pertama dan benda kedua setelah mendapat kontrol.

Dari sistem massa pegas dengan redaman pada Gambar 3.1, dapat dibentuk suatu model kontrol dalam bentuk blok diagram, seperti pada Gambar 3.2 berikut:

Gambar 3.2

Dengan menerapkan hukum kedua Newton dan hukum Hooke pada Gambar 3.1 diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= b_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_1 x_1 + k_2 x_2 + F_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 &= b_1 \dot{x}_1 - (b_1 + b_2) \dot{x}_2 + k_1 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 + F_2 \end{aligned}$$

Definisikan $x_3 = \dot{x}_1$ dan $x_4 = \dot{x}_2$, sehingga

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{k_2}{m_1} x_2 - \frac{b_1}{m_1} x_3 + \frac{b_1}{m_1} x_4 + \frac{F_1}{m_1} \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_1}{m_2} x_1 + \frac{k_1 + k_2}{m_2} x_2 + \frac{b_1}{m_2} x_3 - \frac{b_1 + b_2}{m_2} x_4 + \frac{F_2}{m_2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Sehingga berdasarkan sistem persamaan 3.1, didapatkan persamaan *state space* yaitu:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1 + k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1 + b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Dimana

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Bila $G(s)$ adalah fungsi tranfer dari (F_1, F_2) ke (x_1, x_2) , maka

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$