Topik Aljabar 2

Ririn Sispiyati (20106003)

Proposisi 1.

Misalkan O_{Δ_f} adalah suatu order dengan konduktor f pada suatu imaginary quadratic field $\mathbf{Q}(\sqrt{\Delta})$ dengan order maksimal O_{Δ_1}.

(i) Jika $U \in I_{\Delta_1}(f)$, maka $\mathfrak{a} = U \cap O_{\Delta_f} \in I_{\Delta_f}(f)$ dan $N(U) = N(\mathfrak{a})$.

(ii) Jika $\mathfrak{a} \in I_{\Delta_f}(f)$, maka $U = \mathfrak{a}O_{\Delta_1} \in I_{\Delta_1}(f)$ dan $N(\mathfrak{a}) = N(U)$.

(iii) Pemetaan $\varphi : U \mapsto U \cap O_{\Delta_f}$ merupakan isomorfisma yang mengakibatkan $I_{\Delta_1}(f) \cong I_{\Delta_f}(f)$.

Bukti :

(i) Misalkan $U \in I_{\Delta_1}(f) = \{q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$ invertible $\mid (q^2a, f) = 1\}$.

Tulis $U = q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$ untuk suatu $q \in \mathbf{Q}_{>0}$, $a \in \mathbf{Z}_{>0}$, dengan $c = (b^2 - \Delta_1)/4a \in \mathbf{Z}$, $(q^2a, f) = 1$, $(a,b,c) = 1$.

Klaim $U \cap O_{\Delta_f} = q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z}) = q(a\mathbf{Z} + \frac{fb+f\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$.

Karena $U = q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$ dan $O_{\Delta_f} = q(a\mathbf{Z} + \frac{b+f\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$, maka

$q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z}) = q(a\mathbf{Z} + \frac{fb+f\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z}) \subseteq U \cap O_{\Delta_f}$.

Andai $U \cap O_{\Delta_f} \not\subseteq q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z})$, maka terdapat $x \in U \cap O_{\Delta_f}$ dengan $x \notin q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z})$.

Tulis $x = q(ak + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2}(fl+m))$ untuk suatu $k,l,m \in \mathbf{Z}$ dengan $0 < |m| < |f|$ ($fl+m$ anggota koset bukan $f\mathbf{Z}$).

Karena $x = q(ak + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2}(fl+m)) = q(ak + \frac{(fl+m)b+(fl+m)\sqrt{\Delta_1}}{2})$ dan $fl+m \notin f\mathbf{Z}$, maka

$x = q(ak + \frac{(fl+m)b+(fl+m)\sqrt{\Delta_1}}{2}) \notin O_{\Delta_f}$. Kontradiksi dengan $x \in U \cap O_{\Delta_f}$.

Haruslah $U \cap O_{\Delta_f} \subseteq q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z})$.

Terbukti $U \cap O_{\Delta_f} = q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\,\mathbf{Z})$.

Akan dibuktikan $q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\,\mathbf{Z}) \in I_{\Delta_f}(f)$.

Karena $c_1 = (f^2 b^2 - f\ \Delta_1)/4a = f^2 c \in \mathbf{Z}$ dan

$(a,b,c_1) = (a,b, f^2 c) = ((a, f^2 c),b) = ((a,c),b) = (a,b,c) = 1$, maka $q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\,\mathbf{Z}) \in I_{\Delta_f}(f)$.

$N(U) = N(q(a\mathbf{Z} + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})) = q^2 a = N(q(a\mathbf{Z} + \frac{fb+f\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})) = N(U \cap O_{\Delta_f})$.

Terbukti.

(ii) Misalkan $\mathfrak{a} \in I_{\Delta_f}(f)$, tulis $\mathfrak{a} = q(a\mathbf{Z} + \frac{b+f\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$ dengan $(q^2 a, f) = 1$.

Karena $(q^2 a, f) = 1$, maka $pq^2 a + rf = 1$ untuk suatu $p,r \in \mathbf{Z}$.

Karena $pq^2 a = q((pq)a + \frac{b+\sqrt{\Delta_1}}{2} 0) \in \mathfrak{a}$ dan $rf \in f\ O_{\Delta_1}$, maka $1 \in \mathfrak{a} + f\ O_{\Delta_1}$, yang menyebabkan

$O_{\Delta_1} = (1) = \mathfrak{a} + f\ O_{\Delta_1}$.

Karena $O_{\Delta_1} = \mathfrak{a} + f\ O_{\Delta_1}$, maka (menurut lemma 7.11) $\mathfrak{a}$ prim atas f di O_{Δ_1}.

Terbukti bahwa $\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \in I_{\Delta_1}(f)$.

Karena $\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \in I_{\Delta_1}(f)$, maka menurut (i) $\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f} \in I_{\Delta_f}(f)$ dengan

$N(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) = N(\mathfrak{a} O_{\Delta_1})$.

Akan dibuktikan $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}$.

Karena $\mathfrak{a} \in I_{\Delta_f}(f)$, maka $\mathfrak{a} \subseteq O_{\Delta_f}$.

Karena $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} O_{\Delta_1}$ dan $\mathfrak{a} \subseteq O_{\Delta_f}$, maka $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}$.

$\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f} = \mathfrak{a} O_{\Delta_1}\ O_{\Delta_f} \cap O_{\Delta_f}\ O_{\Delta_f} = (\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) O_{\Delta_f} = (\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f})(\mathfrak{a} + f\ O_{\Delta_f})$

$= \mathfrak{a}(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) + f\ O_{\Delta_f}(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f})$.

Karena $(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) \subseteq \mathfrak{a} O_{\Delta_1} = \mathfrak{a}$ dan $f\ O_{\Delta_f}(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) \subseteq f(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f})$, maka

$\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) + f\ O_{\Delta_f}(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) \subseteq \mathfrak{a} + f(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f})$.

Karena $f(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) \subseteq f\mathfrak{a} O_{\Delta_f}$, maka $\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f} \subseteq \mathfrak{a} + f(\mathfrak{a} O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) \subseteq \mathfrak{a} + f\mathfrak{a} O_{\Delta_1}$.

Karena $f\ O_{\Delta_f} = f\mathbf{Z} + f\ \omega\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z} + f\ \omega\mathbf{Z} = O_{\Delta_f}$, maka

$\mathfrak{a}O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f} \subseteq \mathfrak{a} + f\mathfrak{a}O_{\Delta_1} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{a}O_{\Delta_1} = \mathfrak{a}$.

Terbukti bahwa $\mathfrak{a}O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f} = \mathfrak{a}$.

$N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{a}O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f}) = N(\mathfrak{a}O_{\Delta_1})$.

(iii) Definisikan $\varphi : I_{\Delta_1}(f) \to I_{\Delta_f}(f)$ dengan $\varphi(U) = U \cap O_{\Delta_f}$.

Karena $U \cap O_{\Delta_f} \in I_{\Delta_f}(f)$ dan untuk setiap U terdapat secara tunggal $U \cap O_{\Delta_f}$,

maka φ terdefinisi dengan baik sebagai pemetaan.

Ambil sebarang $\mathfrak{a} \in I_{\Delta_f}(f)$, maka menurut (ii) $\mathfrak{a}O_{\Delta_1} \in I_{\Delta_1}(f)$.

Karena $\varphi(\mathfrak{a}O_{\Delta_1}) = \mathfrak{a}O_{\Delta_1} \cap O_{\Delta_f} = \mathfrak{a}$, maka terbukti φ pada.

Ambil sebarang $U_1, U_2 \in I_{\Delta_1}(f)$ dengan $\varphi(U_1) = \varphi(U_2)$, maka $U_1 = q_1(a_1\mathbf{Z} + \frac{b_1+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$ dan

$U_2 = q_2(a_2\mathbf{Z} + \frac{b_2+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$ untuk suatu $q_1,a_1,b_1,q_2,a_2,b_2 \in \mathbf{Z}$.

Karena $q_1(a_1\mathbf{Z} + \frac{b_1+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z}) = \varphi(U_1) = \varphi(U_2) = q_2(a_2\mathbf{Z} + \frac{b_2+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z})$, maka

$q_1 = q_2$, $a_1 = a_2$, dan $b_1 = b_2$, yaitu $U_1 = U_2$. Terbukti φ satu-satu.

Ambil sebarang $U_1, U_2 \in I_{\Delta_1}(f)$, tulis $U_1 = q_1(a_1\mathbf{Z} + \frac{b_1+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$ dan $U_2 = q_2(a_2\mathbf{Z} + \frac{b_2+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})$

untuk suatu $q_1,a_1,b_1,q_2,a_2,b_2 \in \mathbf{Z}$.

$$\varphi(U_1U_2) = \varphi(q_1(a_1\mathbf{Z} + \tfrac{b_1+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})q_2(a_2\mathbf{Z} + \tfrac{b_2+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z})) = \varphi(q_3(a_3\mathbf{Z} + \tfrac{b_3+\sqrt{\Delta_1}}{2}\mathbf{Z}))$$

$$= q_3(a_3\mathbf{Z} + \tfrac{b_3+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z}) = q_1(a_1\mathbf{Z} + \tfrac{b_1+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z})q_2(a_2\mathbf{Z} + \tfrac{b_2+\sqrt{\Delta_1}}{2} f\mathbf{Z}) = \varphi(U_1)\varphi(U_2).$$

Terbukti φ homomorfisma.

Karena φ homomorfisma satu-satu dan pada, maka adalah φ isomorfisma, yang

mengakibatkan $I_{\Delta_1}(f) \cong I_{\Delta_f}(f)$.