ALGORITMA METODE SIMPLEKS (PRIMAL)

- *Artificial Variable*
- Algoritma Simpleks
- Metode – M (*Method of penalty*)
- Metode dua fase
- Tabel Simpleks dalam bentuk matriks

Artificial Variable *(AV)*

Apabila terdapat satu atau lebih pembatas linear bertanda "≥" atau "=" maka diperlukan suatu peubah semu (*artificial variable*) yang mempunyai peranan seperti *slack variable*. Hal ini diperlukan karena pada setiap iterasi penyelesaian dengan metode simpleks diperlukan matriks basic.

Artificial variable ini tidak memiliki makna fisik dalam model PL awal, ketentuan harus dibuat untuk membuat AV bernilai nol di iterasi optimum. Dengan kata lain menggunakan AV untuk memulai solusi dan meninggalkannya setelah misi mereka terpenuhi. Kita mencapai hal ini dengan menggunakan umpan balik informasi yang akan membuat AV ini tidak menarik dari sudut pandang optimasasi. Satu cara yang logis untuk mencapai tujuan ini adalah dengan mengenakan *penalty* pada AV dalam fungsi tujuan.

Algoritma Simpleks untuk Maksimasi

Untuk menyelesaikan masalah PL dengan metode simpleks serta dengan fungsi tujuan maksimasi z, lakukanlah langkah-langkah berikut:

1. Mengubah semua pembatas linear ke bentuk standar dengan menambahkan *slack variable* atau mengurangi *surplus variable* pada pembatas linear tersebut. *Slack variables* yang ada dimasukkan (ditambahkan) ke fungsi tujuan dan diberi koefisien 0.

2. Apakah dalam matriks $A = \left\{ a_{ij} \right\}$ sudah terbentuk matriks identitas $\left(I_m \right)$?

   a. Apabila dalam matriks **A** sudah terbentuk matriks identitas maka disusun tabel awal simpleks sebagai berikut:

BV	Z	X_1	X_2	X_3	. . .	X_N	Solusi (RK)	R_i
Z_j - C_j	1	$Z_1 - C_1$	$Z_2 - C_2$	$Z_3 - C_3$	. . .	$Z_N - C_N$	0	
X_{B1}	0	β_{11}	β_{12}	β_{13}	. . .	β_{1N}	b_1	R_1
X_{B2}	0	β_{21}	β_{22}	β_{23}	. . .	β_{2N}	b_2	R_2
...	...	...	...	...	. . .	...	...	...
X_{Bm}	0	β_{m1}	β_{m2}	β_{m3}	. . .	β_{mN}	b_m	R_m

b. Apabila belum terbentuk matriks identitas, maka matriks identitas dimunculkan dengan menambahkan peubah semu (*artificial variable*). Peubah semu yang ada dimasukkan di fungsi tujuan, sedangkan koefisien dari peubah semu pada fungsi tujuan diberi nilai $(-M)$ dengan *M* adalah bilangan yang cukup besar. Untuk lebih jelasnya biasanya perubah semu (*artificial variable*) ditambahkan pada pembatas linear dengan batasan bertanda "$\geq$" dan "$=$" . Selanjutnya ke langkah (2.a).

3. Penelitian terhadap nilai $z_j - c_j$ (tabel simpleks sudah maksimum apabila semua $z_j - c_j \geq 0$).

   a. Apabila untuk semua *j* diperoleh $z_j - c_j \geq 0$, maka dilanjutkan ke langkah ke-4

   b. Apabila ada satu atau lebih $z_j - c_j < 0$ maka akan dibuat tabel simpleks baru dengan cara berikut ini:

      (i) Menentukan kolom kunci yaitu dengan memilih nilai $z_j - c_j$ yang terkecil sesuai dengan aturan pada persamaan (a.1) dan misalkan diperoleh $z_k - c_k$, maka kolom ke-*k* dinamakan **kolom kunci/kolom masuk** (***entering colomn***/EC)

(ii) Pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai a_{ik}

a. Apabila untuk semua a_{ik} nilainya negatif maka diperoleh solusi tak terbatas (*unbounded solution*)

b. Apabila terdapat a_{ik} yang nilainya positif maka hitunglah nilai dari R_i (ingat! hanya untuk yang positif saja), kemudian dilanjutkan ke langkah di bawah ini.

(iii) Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilih nilai R_i yang terkecil (diantara yang positif) sesuai dengan aturan pada persamaan (a.2) dan

misalkan diperoleh b_r , maka baris ke-*r*

dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (*pivot equation/*PE).

c. Selanjutnya menyusun tabel simpleks baru atau perhitungan simpleks dengan iterasi-iterasi yaitu dengan cara:

(i) Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*r* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** (a_{rk}) **.**

(ii). Untuk elemen baris ke-*r* $\left(b_r\right)$ biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

$$\text{newPE} = PE \div a_{rk}$$

(iii) Untuk elemen baris ke-*i* yang lainnya ditentukan dengan perumusan:

$$\text{Persamaan baru} = \text{persamaan lama} - \left(a_{ik}\right) \times (\text{newPE})$$

4. Apabila untuk semua *j* nilai dari $z_j - c_j$ adalah $z_j - c_j \leq 0$ maka fungsi tujuannya telah mencapai optimal.

Contoh:

Diberikan suatu model permasalahan program linear, berikut ini:

Maksimasi: $z = 3x_1 + 3x_2$ (dalam ribuan)

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$$2x_1 + x_2 \leq 30$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$
$$4x_1 + 3x_2 \leq 72$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Algoritma Simpleks untuk Minimasi

Untuk menyelesaikan masalah PL dengan metode simpleks serta dengan fungsi tujuan minimasi z, lakukanlah langkah-langkah berikut:

1. Mengubah semua pembatas linear ke bentuk standar dengan menambahkan *slack variable* atau mengurangi *surplus variable* pada pembatas linear tersebut. *Slack variables* yang ada dimasukkan (ditambahkan) ke fungsi tujuan dan diberi koefisien 0.

2. Apakah dalam matriks $A = \{a_{ij}\}$ sudah terbentuk matriks identitas (I_m) ?

   a. Apabila dalam matriks **A** sudah terbentuk matriks identitas maka disusun tabel awal simpleks sebagai berikut:

b. Apabila belum terbentuk matriks identitas, maka matriks identitas dimunculkan dengan menambahkan peubah semu (*artificial variable*). Peubah semu yang ada dimasukkan di fungsi tujuan, sedangkan koefisien dari peubah semu pada fungsi tujuan diberi nilai $(+M)$ dengan M adalah bilangan yang cukup besar. Untuk lebih jelasnya biasanya perubah semu (*artificial variable*) ditambahkan pada pembatas linear dengan batasan bertanda $"\geq"$ dan $"="$. Selanjutnya ke langkah (2.a).

3. Penelitian terhadap nilai $z_j - c_j$ (tabel simpleks sudah minimum apabila semua $z_j - c_j \leq 0$).

   a. Apabila untuk semua *j* diperoleh $z_j - c_j \leq 0$, maka dilanjutkan ke langkah ke-4

   b. Apabila ada satu atau lebih $z_j - c_j > 0$ maka akan dibuat tabel simpleks baru dengan cara berikut ini:

      (i) Menentukan kolom kunci yaitu dengan memilih nilai $z_j - c_j$ yang terbesar sesuai dengan aturan pada persamaan (a.1) dan misalkan diperoleh $z_k - c_k$, maka kolom ke-*k* dinamakan **kolom kunci/kolom masuk** (***entering colomn***/EC)

(ii) Pada EC dilakukan pemeriksaan terhadap nilai a_{ik}

a. Apabila untuk semua a_{ik} nilainya negatif maka diperoleh solusi tak terbatas (*unbounded solution*)

b. Apabila terdapat a_{ik} yang nilainya positif maka hitunglah nilai dari R_i (ingat! hanya untuk yang positif saja), kemudian dilanjutkan ke langkah di bawah ini.

(iii) Menentukan baris kunci, yaitu dengan memilih nilai R_i yang terkecil (diantara yang positif) sesuai dengan aturan pada persamaan (a.2) dan misalkan diperoleh b_r , maka baris ke-*r* dinamakan **baris kunci/persamaan pivot** (*pivot equation/*PE).

c. Selanjutnya menyusun tabel simpleks baru atau perhitungan simpleks dengan iterasi-iterasi yaitu dengan cara:

(i) Sebelum menentukan elemen-elemen baris ke-*r* yang baru perlu diketahui bahwa elemen titik potong antara EC dan PE dinamakan **elemen pivot** $\left(a_{rk}\right)$.

(ii). Untuk elemen baris ke-*r* $\left(b_r\right)$ biasanya dinamakan persamaan pivot baru (*new*PE) ditentukan dengan perumusan:

$$\text{newPE} = PE \div a_{rk}$$

(iii) Untuk elemen baris ke-*i* yang lainnya ditentukan dengan perumusan:

$$\text{Persamaan baru} = \text{persamaan lama} - \left(a_{ik}\right) \times (\text{newPE})$$

4. Apabila untuk semua *j* nilai dari $z_j - c_j$ adalah $z_j - c_j \leq 0$ maka fungsi tujuannya telah mencapai optimal.

Metode M

Contoh : Minimasi: $z = 4x_1 + x_2$

dengan pembatas linear:

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Satu kekurangan dari metode M ini adalah kemungkinan kesalahan perhitungan yang dapat dihasilkan dari pemberian nilai yang terlalu besar untuk konstanta M.

Metode Dua Fase

Metode ini pada dasarnya sama dengan metode M yaitu sama-sama melibatkan AV sehingga memunculkan koefisien M, namun penggunaan koefisien M pada metode ini disingkirkan dengan memecahkan masalah ini dalam dua fase. Oleh karena itu, metode ini dinamakan metode dua fase.

Metode dua fase ini merupakan modifikasi dari metode M, yaitu dengan cara:

1. Pada fase I ini AV akan diteliti dengan cara meminimumkan fungsi tujuan baru, dimana fungsi tujuan baru tersebut adalah jumlah AV pada pembatas linear.

   Jika nilai minimum dari fungsi tujuan baru tersebut adalah nol (yang berarti semua AV bernilai nol), maka masalah PL itu mempunyai solusi basis, sehingga dapat dilanjutkan ke fase II.

Jika nilai minimum dari fungsi tujuan baru tersebut tidak sama dengan nol, maka masalah PL itu tidak mempunyai solusi basis.

2. Menggunakan nilai optimum solusi basis pada fase I sebagai solusi awal untuk masalah PL awal.

Contoh : Meminimumkan $z = 4x_1 + x_2$

dengan pembatas linear: $3x_1 + x_2 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Tabel Simpleks dalam bentuk matriks

Gagasan umum dari metode simpleks adalah memulai dari satu titik ekstrem dan melanjutkan ke satu titik ekstrem di sebelahnya dengan tujuan memperbaiki optimalitas sambil mempertahankan kelayakan (metode primal) atau bergerak ke arah kelayakan tanpa merusak optimalitas (metode dual).

Cara paling sederhana untuk memilih titik ekstrem awal adalah menggunakan basis **B**. Dengan cara ini, **B** awal adalah matriks identitas **I** yang jelas merupakan basis.

Maksimasi / Minimasi

$$z = C\,X$$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$$\left(A\;I\right)X = b \qquad\qquad X \geq 0$$

Matriks **X** dibagi menjadi dua sub matriks yaitu $\mathbf{X_I}$ & $\mathbf{X_{II}}$, dimana $\mathbf{X_{II}}$ bersesuaian dengan elemen-elemen dari **X** yang berkaitan dengan basis awal **B** = **I**.

Matriks **C** dibagi menjadi dua sub matriks yaitu $\mathbf{C_I}$ & $\mathbf{C_{II}}$, yang bersesuaian dengan $\mathbf{X_I}$ & $\mathbf{X_{II}}$.

Maksimasi / Minimasi

$$z = C_I \; X_I + C_{II} \; X_{II}$$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$$A\,X_I + I\,X_{II} = b \qquad\qquad X_I, X_{II} \geq 0$$

dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_I & -C_{II} \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Pada tiap iterasi, misalkan $\mathbf{X_B}$ mewakili BV saat ini dengan **B** sebagai basis yang berkaitan dengannya.

Hal ini berarti $\mathbf{X_B}$ mewakili *m* elemen dari X dengan **B** mewakili sub matriks dari **(A I)** yang berkaitan dengan $\mathbf{X_B}$, sedangkan $\mathbf{C_B}$ adalah elemen **C** yang berkaitan dengan $\mathbf{X_B}$. Karena itu diperoleh:

$$B X_B = b \qquad\qquad z = C_B X_B$$

atau dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{bmatrix} 1 & -C_B \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan inversi pada matriks di atas maka nilai z dan $\mathbf{X_B}$ ditentukan, yaitu

$$\begin{bmatrix} z \\ X_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Tabel simpleks umum yang bersesuaian dengan $\mathbf{X_B}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -C_I & -C_{II} \\ 0 & A & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & C_B B^{-1} A - C_I & C_B B^{-1} - C_{II} \\ 0 & B^{-1} A & B^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ X_I \\ X_{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_B B^{-1} b \\ B^{-1} b \end{bmatrix}$$

Iterasi simpleks umum dinyatakan dalam bentuk matriks:

BV	$\mathbf{X_I}$	$\mathbf{X_{II}}$	
z	$\mathbf{C_B B^{-1} A - C_I}$	$\mathbf{C_B B^{-1} - C_{II}}$	$\mathbf{C_B B^{-1} b}$
$\mathbf{X_B}$	$\mathbf{B^{-1} A}$	$\mathbf{B^{-1}}$	$\mathbf{B^{-1} b}$

Ilustrasi, berikut ini adalah tabel awal dari metode simpleks yang terdiri dari semua *slack variable*.

Pada kasus ini diketahui bahwa $\mathbf{C_{II}} = 0$, dan solusi basic awal didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{X_B} = \mathbf{X_{II}}, \quad \mathbf{C_B} = \mathbf{C_{II}} = 0, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} \text{ sehingga } \mathbf{B^{-1}} = \mathbf{I}$$

Tabel awal untuk contoh kasus di atas adalah:

BV	$\mathbf{X_I}$	$\mathbf{X_{II}}$	
z	$-\ \mathbf{C_I}$	**0**	**0**
$\mathbf{X_{II}}$	**A**	**I**	**b**

Ilustrasi, berikut ini adalah tabel awal dari metode simpleks yang memuat *artificial variable*.

Pada kasus ini, untuk metode M, $\mathbf{C_{II}}$ = (-M, …, -M) (maksimasi) dan metode dua fase $\mathbf{C_{II}}$ = (1, …, 1).

Solusi basic awal didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{X_B} = \mathbf{X_{II}}, \quad \mathbf{C_B} = \mathbf{C_{II}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{I} \text{ sehingga } \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{I}$$

Tabel awal untuk contoh kasus di atas adalah:

BV	$\mathbf{X_I}$	$\mathbf{X_{II}}$	
z	$\mathbf{C_{II}A - C_I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{C_{II}b}$
$\mathbf{X_{II}}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{b}$

Kasus-Kasus Khusus

Beberapa kasus yang dijumpai pada penerapan metode *simplex*, yaitu:

1. Degenerasi
2. Optimal alternatif
3. Solusi tanpa batas
4. Tak ada solusi

Degenerasi

Kasus degenerasi terjadi apabila pada tabel *simplex* terdapat satu atau lebih BV yang bernilai nol. Hal ini mengakibatkan iterasi yang dilakukan selanjutnya dapat menjadi suatu loop yang akan kembali pada bentuk sebelumnya. Kejadian ini dinamakan *Cycling/Circling*.

Pertanyaan yang timbul dari kasus ini selanjutnya adalah mengapa kita tidak berhenti melakukan perhitungan pada saat iterasi *simplex* menghasilkan suatu solusi yang degenerate? Jawabannya ialah karena tidak semua persoalan menghasilkan solusi degenerate yang tetap. Artinya, ada persoalan yang pada suatu saat bersifat degenerate, tetapi pada iterasi berikutnya degenarate ini menghilang, hal ini biasanya dinamakan degenerate temporer.

Contoh kasus degenerate

Contoh kasus degenerate temporer

Contoh Kasus Degenerate

Maksimumkan : $z = 3x_1 + 9x_2$

berdasarkan pembatas:

$$x_1 + 4x_2 \leq 8$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Contoh Kasus Degenerate Temporer

Maksimumkan: $z = 3x_1 + 2x_2$

berdasarkan pembatas:

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12$$

$$4x_1 + x_2 \leq 8$$

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Optimal Alternatif

Apabila fungsi tujuan diasumsikan mencapai nilai yang sama untuk lebih dari satu titik solusi maka kasus ini disebut optimal alternatif karena dihadapkan pada pilihan lebih dari satu pasangan peubah yang memberi nilai optimal yang sama.

Contoh kasus optimal alternatif

Memaksimumkan : $z = 2x_1 + 4x_2$

berdasarkan pembatas linear:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad \text{dan } x_1, x_2 \geq 0$$

Solusi Tak Terbatas

Pada sejumlah model PL nilai peubah dapat saja meningkat tak terbatas tanpa mengganggu suatu pembatas linear, hal ini berarti ruang solusi terbuka atau tak terbatas. Akibatnya nilai fungsi tujuannya juga dapat terus meningkat (maksimasi) atau terus menurun (minimasi).

Contoh kasus solusi tak terbatas

Memaksimukan $z = 2x_1 + x_2$ dengan pembatas linear

$$x_1 - x_2 \leq 5$$

$$2x_1 \leq 40 \quad \text{dan } x_1, x_2 \geq 0$$

Tak ada solusi

Contoh kasus tak ada solusi

Maksimumkan: $z = 3x_1 + 2x_2$

berdasarkan pembatas:

$$2x_1 + x_2 \leq 5$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$