BEBERAPA FORMULA PENTING DALAM SOLUSI PROGRAM LINEAR

Bentuk Standar Masalah PL

- Maksimasi : $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

dengan pembatas linear

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

dan pembatas tanda

$$x_j \geq 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

Apabila diketahui solusi layak optimal untuk masalah PL di atas telah diperoleh, dengan BV_j menyatakan BV untuk baris ke-*j* dari tabel optimalnya.

- $BV = \{BV_1, BV_2, \ldots, BV_m\}$ menyatakan himpunan BV dari tabel optimal dan didef:

$$x_{BV} = \begin{bmatrix} x_{BV_1} & x_{BV_2} & \cdots & x_{BV_m} \end{bmatrix}^T$$

- NBV menyatakan himpunan NBV dari tabel optimal
- x_{NBV} menyatakan vektor berorde ((n – m) x 1) dimana elemen-elemennya merupakan NBV

- c_{BV} merupakan vektor baris berorde (1 x m) dinyatakan $c_{BV} = [c_{BV1} \; c_{BV2} \; \ldots \; c_{BVm}]$
- c_{NBV} merupakan vektor baris berorde (1 x (n – m)) dimana elemen-elemennya merupakan koefisien fungsi tujuan dari NBV
- Matriks B berorde (m x m) merupakan matriks dimana kolom-kolomnya diisi dengan kolom-kolom BV
- a_j merupakan kolom (dalam pembatas linear bentuk standar) untuk peubah x_j dalam persamaan (1) .

- Matriks N berorde (m x (n – m)) merupakan matriks dimana kolom-kolomnya diisi dengan kolom-kolom NBV.
- b adalah vektor kolom berorde (m x 1) merupakan ruas kanan dari pembatas linear dalam persamaan (1).

Permasalahan PL dalam persamaan (1) dapat dinyatakan sbb:

Maksimasi $z = c_{BV}\ x_{BV} + c_{NBV}\ x_{NBV}$

dengan pembatas linear & pembatas tanda

$$B\,x_{BV} + N\ X_{NBV} = b \qquad (2)$$

$$x_{BV}\,,\ x_{NBV} \geq 0$$

Selanjutnya kalikan pers. (2) dengan B^{-1}, diperoleh

$$B^{-1}Bx_{BV} + B^{-1}Nx_{NBV} = B^{-1}b$$

$$x_{BV} + B^{-1}Nx_{NBV} = B^{-1}b \qquad (3)$$

Berdasarkan (3) diperoleh:

- Kolom untuk x_j pada tabel optimal adalah $B^{-1}a_j$
- Ruas kanan pada tabel optimal adalah $B^{-1}b$

Menentukan baris 0/baris z pada tabel optimal berdasar masalah awal PL

Selanjutnya apabila pers. (3) dikalikan dengan c_{BV}, diperoleh:

$$c_{BV}x_{BV} + c_{BV}B^{-1}Nx_{NBV} = c_{BV}B^{-1}b \qquad (4)$$

Fungsi tujuan awal adalah

$$z = c_{BV}x_{BV} + c_{NBV}x_{NBV}$$

$$z - c_{BV}x_{BV} - c_{NBV}x_{NBV} = 0 \qquad (5)$$

Selanjutnya penjumlahan dari (4) dan (5) diperoleh:

$$z + (c_{BV}B^{-1}N - c_{NBV})x_{NBV} = c_{BV}B^{-1}b \qquad (6)$$

Berdasarkan pers. (6), maka:

- Koefisien dari x_j pada baris 0/baris z dinotasikan dengan $c_{j(baru)}$, dan ditentukan dengan:

$$c_{j(baru)} = c_{BV}B^{-1}a_j - c_j$$

- Ruas kanan pada baris 0/baris z dalam tabel optimal adalah $c_{BV}B^{-1}b$
- Koefisien *slack variable* s_i pada baris 0 ditentukan dengan: elemen ke-i dari $c_{BV}B^{-1}$
- Koefisien *surplus variable* e_i pada baris 0 ditentukan dengan: -(elemen ke-i dari $c_{BV}B^{-1}$)

- Koefisien *artificial variable* a_i pada baris 0 ditentukan dengan:

$$(\text{elemen ke-i dari } c_{BV}B^{-1}) + M \qquad\qquad (\text{Max})$$

$$(\text{elemen ke-i dari } c_{BV}B^{-1}) - M \qquad\qquad (\text{Min})$$

CONTOH SOAL

Untuk masalah PL berikut diperoleh solusi optimal dengan BV = $\{x_1, x_2\}$. Tentukan tabel optimalnya.

Maksimasi: $z = 3x_1 + x_2$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$2x_1 - x_2 \leq 2$

$-x_1 + x_2 \leq 4$ $\quad\quad x_1, x_2 \geq 0$

Penyelesaian:

Bentuk standar:

Maksimasi: $z = 3x_1 + x_2$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$2x_1 - x_2 + 1s_1 + 0s_2 = 2$

$-x_1 + x_2 + 0s_1 + 1s_2 = 4$ $\quad x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$

Diketahui BV adalah x_1 dan x_2 maka diperoleh bahwa matriks B adalah

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

diperoleh

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Menentukan kolom s_1 pada tabel optimal:

$$B^{-1}a_{s_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Menentukan kolom s_2 pada tabel optimal:

$$B^{-1}a_{s_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Menentukan ruas kanan tabel optimal

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

- Bagian tabel optimal tanpa baris z/baris 0, yaitu

$$x_1 + 0x_2 + 1s_1 + 1s_2 = 6$$

$$0x_1 + x_2 + 1s_1 + 2s_2 = 10$$

Menentukan baris 0/baris z pada tabel optimal

Diketahui c_{BV} = [3 1], sehingga

$$c_{BV}B^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}$$

- Menentukan koefisien s_1 pada baris 0/baris z tabel optimal adalah elemen pertama dari $c_{BV}B^{-1}$ yaitu 4
- Menentukan koefisien s_1 dalam baris 0 tabel optimal adalah elemen pertama dari $c_{BV}B^{-1}$ yaitu 5
- Menentukan ruas kanan dalam baris 0 tabel optimal:

$$c_{BV}B^{-1}b = \begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 \\ 4\end{bmatrix} = 28$$

- Tabel Optimal untuk masalah PL di atas adalah

$$z + 0x_1 + 0x_2 + 4s_1 + 5s_2 = 28$$

$$1x_1 + 0x_2 + 1s_1 + 1s_2 = 6$$

$$0x_1 + 1x_2 + 1s_1 + 2s_2 = 10$$

ANALISIS SENSITIVITAS (ANALISIS PASCA-OPTIMAL)

Inti dari analisis pasca-optimal ada dalam penelitian terhadap tabel simpleks umum yang diberikan dalam bentuk matriks. Diketahui masalah PL berikut dalam bentuk standar:

Maksimasi / Minimasi

$$z = C_{BV} X_{BV} + C_{NBV} X_{NBV}$$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$$B X_{BV} + N X_{NBV} = b \qquad X_I , X_{II} \geq 0$$

Analisis sensitivitas akan mempelajari mengenai pengaruh perubahan koefisien fungsi tujuan C_{BV} dan C_{NBV} dan/atau jumlah sumber daya yang tersedia b. Perubahan dalam C_{BV}, C_{NBV}, dan b tidak memiliki pengaruh apapun terhadap B atau B^{-1}.

Hal pertama yang dilakukan dalam analisis sensitivitas adalah menguji apakah sebuah perubahan tertentu dari (C_{BV}, C_{NBV}) ke (D_{BV}, D_{NBV}) dan/atau perubahan dari b ke d akan membuat basis saat ini B optimal dan layak.

Asumsi tidak ada perubahan pada B, untuk menyelesaikannya maka kita akan mengganti C_{BV} dengan D_{BV} dan b dengan d, kemudian menghitung ulang baris tujuan (gunakan $D_{BV}B^{-1}$) dan ruas kanan dihitung dengan $B^{-1}d$.

Apabila tidak ada satu pun koefisien baris tujuan yang baru tersebut melanggar optimalitas dan koefisien ruas kanan yang baru menjadi negatif, maka B tetap optimal dan layak di nilai yang baru $B^{-1}d$.

Analisis sensitivitas dapat dimasukkan ke dalam salah satu dari ketiga kategori berikut:

1. Perubahan dalam koefisien tujuan (C_{BV}, C_{NBV}) hanya dapat mempengaruhi optimalitas
2. Perubahan dalam ruas kanan b hanya dapat mempengaruhi kelayakan
3. Perubahan simultan dalam (C_{BV}, C_{NBV}) dan b dapat mempengaruhi baik optimalitas maupun kelayakan.

Perubahan yang mempengaruhi optimalitas

Optimalitas dari solusi simpleks dipengaruhi oleh hanya satu dari tiga cara ini:

1. Koefisien tujuan (C_{BV}, C_{NBV}) diubah
2. Penggunaan sumber daya dari sebuah kegiatan nondasar (vektor kolom NBV dalam A) diubah.
3. Sebuah kegiatan baru ditambahkan ke dalam model

Perubahan yang mempengaruhi kelayakan

Kelayakan dari solusi simpleks dipengaruhi oleh hanya satu dari dua cara ini:

1. Vektor ruas kanan b diubah
2. Sebuah pembatas linear ditambahkan ke dalam model

Perubahan yang mempengaruhi optimalitas dan kelayakan

Optimalitas dari solusi simpleks dipengaruhi oleh:

1. Koefisien tujuan (C_{BV}, C_{NBV}) dan vektor ruas kanan b diubah

1. Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk NBV
2. Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk BV
3. Perubahan ruas kanan dari pembatas linear
4. Perubahan pada kolom NBV
5. Penambahan peubah baru/aktivitas baru
6. Penambahan pembatas linear

Contoh Kasus

Maksimasi: $z = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$

dengan pembatas linear dan pembatas tanda

$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \le 48$$

$$4x_1 + 2x_2 + 1{,}5x_3 \le 20 \qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

$$2x_1 + 1{,}5x_2 + 0{,}5x_3 \le 8$$

Tabel optimalnya adalah:

BV	z	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Solusi
Z	1	0	5	0	0	10	0	280
X4	0	0	-2	0	1	2	-8	24
X3	0	0	-2	1	0	2	-4	8
X1	0	1	1,25	0	0	-0,5	1,5	2

Berdasarkan tabel di atas diperoleh informasi:

BV adalah x_4, x_3, x_1 dan NBV adalah x_2, x_5, x_6

Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk NBV

Perubahan ini terjadi karena adanya perubahan baik pada kontribusi keuntungan maupun kontribusi ongkos dari kegiatan yang diwakili oleh NBV.

Pada contoh di atas satu-satunya peubah keputusan nonbasis adalah x_2. Misalkan koefisien tujuan dari x_2 berubah dari $c_2 = 30$ menjadi $\bar{c}_2 = 30 + \Delta$.

Nilai BV akan tetap optimal jika $\hat{c}_2 \geq 0$,dan menjadi tidak optimal jika $\hat{c}_2 \leq 0$

Nilai koefisien fungsi tujuan baru setelah terjadinya perubahan dapat ditentukan dengan menggunakan rumus:

$$\hat{c}_j = c_{BV} \cdot B^{-1} \cdot a_j - \bar{c}_j$$

Berdasarkan tabel optimal diperoleh informasi:

$$x_{BV} = \begin{bmatrix} S_1 & x_3 & x_1 \end{bmatrix}^T \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \quad c_{BV} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh nilai $\hat{c}_2$:

$$\hat{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} - (30 + \Delta) = 5 - \Delta$$

Agar solusi tetap optimal maka $\hat{c}_2 \geq 0$ oleh karena itu

$$5 - \Delta \geq 0 \quad atau \quad \Delta \leq 5$$

KLIK

Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk BV

Perubahan ini terjadi karena adanya perubahan baik pada kontribusi keuntungan maupun kontribusi ongkos dari kegiatan yang diwakili oleh BV.

Mengubah koefisien fungsi tujuan BV artinya mengubah c_{BV} sehingga koefisien pada baris z dari tabel optimal akan berubah.

Misalkan koefisien tujuan dari x_1 berubah dari $c_1 = 60$ menjadi $\bar{c}_1 = 60 + \Delta$

Oleh karena itu c_{BV} akan menjadi $\bar{c}_{BV} = [0 \quad 20 \quad 60+\Delta]$

Berdasarkan tabel optimal diperoleh informasi:

$$x_{BV} = \begin{bmatrix} S_1 & x_3 & x_1 \end{bmatrix}^T \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \quad \bar{c}_{BV} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 60+\Delta \end{bmatrix}$$

$$\bar{c}_{BV} B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 10 - \frac{1}{5}\Delta & 10 + \frac{3}{2}\Delta \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh nilai koefisien NBV:

$$\hat{c}_{NBV} = \bar{c}_{BV} \cdot B^{-1} \cdot a_{NBV} - c_{NBV}$$

$$\hat{c}_{NBV} = \begin{bmatrix} 5 + \frac{5}{4}\Delta & 10 - \frac{1}{2}\Delta & 10 + \frac{3}{2}\Delta \end{bmatrix}$$

Agar solusi tetap optimal maka $\hat{c}_{NBV} \geq 0$ oleh karena itu

$$-4 \leq \Delta \leq 20$$

KLIK

Perubahan ruas kanan dari pembatas linear

Misalkan ruas kanan dari pembatas linear ke-2 berubah dari $b_2 = 20$ menjadi $\bar{b}_2 = 20 + \Delta$

Oleh karena itu b akan menjadi

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix}$$

Ruas kanan dari pembatas linear dari tabel optimalnya menjadi:

$$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 48 \\ 20 + \Delta \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 + 2\Delta \\ 8 + 2\Delta \\ 2 - 0{,}5\Delta \end{bmatrix}$$

Agar solusi tetap layak maka $\hat{b} \geq 0$ oleh karena itu

$$-4 \leq \Delta \leq 4$$

KLIK