DISTRIBUSI GAMMA

Ada beberapa distribusi penting dalam distribusi uji hidup, salah satunya adalah distribusi gamma.

A. Fungsi kepadatan peluang (fkp)

Fungsi kepadatan peluang (fkp) dari distribusi gamma dengan dua parameter yaitu p dan σ adalah sebagai berikut:

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\frac{x^{p-1}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right), \qquad x \geq 0, \sigma > 0, \; p > 0$$

dimana: Γ(p) = (p-1)! adalah fungsi gamma.

- Nilai mean dari distribusi gamma adalah:

$$\begin{aligned}
E(x) &= \int_{0}^{\infty} x \cdot f(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{x^{p-1}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{x^{p}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)dx \\
&= \frac{\sigma\Gamma(p+1)}{\Gamma(p)} = \frac{\sigma \cdot p!}{(p-1)!} = \frac{\sigma \cdot (p-1)!\,p}{(p-1)!} = \sigma \cdot p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(x^2) &= \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{x^{p-1}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)dx \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{x^{p+1}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)dx = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{p+1}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)dx \\
&= \frac{\sigma\Gamma(p+2)}{\Gamma(p)} = \frac{\sigma \cdot (p+1)!}{(p-1)!} = \frac{\sigma \cdot (p-1)!\,p \cdot (p+1)}{(p-1)!} = \sigma \cdot p(p+1)
\end{aligned}$$

- Nilai varians dari distribusi gamma adalah:

Fitriani Agustina
Jurusan Pendidikan Matematika
UPI

$$
\begin{aligned}
Var(x) &= E\left(x^2\right) - [E(x)]^2 \\
&= \left[\sigma \cdot \left(p^2 + p\right)\right] - (\sigma \cdot p)^2 \\
&= \left[\sigma^2 p^2 + \sigma p - \sigma^2 p^2\right] \\
&= \sigma p
\end{aligned}
$$

B. Fungsi survivor

Fungsi survivor adalah peluang suatu individu atau objek masih tetap hidup sampai dengan waktu t yang telah ditentukan. Fungsi survivor didefinisikan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
S(t) &= P_r(T \geq t) = 1 - P_r(T \leq t) \\
S(t) &= 1 - F(t)
\end{aligned}
$$

dimana F(t) adalah fungsi distribusi.

$$
\begin{aligned}
S(t) &= \int_t^{\infty} f(x)\,dx \\
S(t) &= \int_t^{\infty} \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{x^{p-1}}{\sigma^p} \exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right) dx \\
S(t) &= 1 - \int_0^{t} \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{x^{p-1}}{\sigma^p} \exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right) dx \\
S(t) &= 1 - I(p, \sigma, x)
\end{aligned}
$$

Fungsi survivor distribusi gamma yang kita peroleh adalah suatu fungsi survivor distribusi gamma dalam bentuk eksplisit. Kita membiarkan fungsi survivor distribusi gamma dalam bentuk eksplisit karena untuk menyelesaikan pengintegralan yang ada dalam rumus diatas pengintegralannya cukup rumit

C. Fungsi hazard

Karena fungsi survivor distribusi gamma tidak dalam bentuk eksplisit, maka fungsi hazardnya juga tidak dalam bentuk eksplisit juga. Fungsi hazard didefinisikan sebagai berikut:

$$h(t) = F'(t) \cdot \frac{1}{S(t)}$$

$$h(t) = f(t) \cdot \frac{1}{S(t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\Gamma(p)} \frac{t^{p-1}}{\sigma^p} \exp\left(\frac{-t}{\sigma}\right)}{1 - \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{t^{p-1}}{\sigma^p} \exp\left(\frac{-t}{\sigma}\right)}$$

D. Fungsi hazard kumulatif

Fungsi hazard kumulatif pun tidak bisa kita nyatakan dalam bentuk implisit, karena fungsi hazardnya sendiri dinyatakan dalam bentuk eksplisit. Fungsi hazard kumulatif didefinisikan sebagai berikut:

$$H(t) = \int_0^t h(x)\,dx$$

$$H(t) = \int_0^t \frac{\frac{1}{\Gamma(p)} \frac{t^{p-1}}{\sigma^p} \exp\left(\frac{-t}{\sigma}\right)}{1 - \int_0^t \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{t^{p-1}}{\sigma^p} \exp\left(\frac{-t}{\sigma}\right)}\,dx$$

E. Estimasi

Misalkan $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ adalah variabel random dari waktu-waktu kegagalan dan variabel random itu berdistribusi Gamma dengan parameter p dan σ.

1. Sampel lengkap

   Suatu sampel dikatakan sampel lengkap apabila ada sebanyak n objek yang ditempatkan pada pengujian dan pengujian dihentikan setelah semua item objek mati.

   - Fungsi kepadatan peluang (fkp) bersama dari $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ adalah:

   $$f\left(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)} \middle| p, \sigma\right) = n! \prod_{i=1}^{n} f\left(x_{(i)} \middle| p, \sigma\right)$$

   - Fungsi likelihoodnya adalah:

$$L\left(p,\sigma \middle| x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\right) = n!\prod_{i=1}^{n} f\left(x_{(i)} \middle| p,\sigma\right)$$

$$L\left(p,\sigma \middle| x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\right) = n!\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(p)}\frac{x^{p-1}}{\sigma^{p}}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)$$

$$L\left(p,\sigma \middle| x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\right) = n![\Gamma(p)]^{-n}\sigma^{-np}\exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}\right)\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}$$

$$\ln L(p,\sigma) = \ln\left[n![\Gamma(p)]^{-n}\sigma^{-np}\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}\exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \ln n! - n\ln\Gamma(p) - np\ln\sigma + (p-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}$$

Nilai maksimum dari $L(\sigma, p|x_i)$ akan dicapai apabila $\dfrac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial\sigma} = 0 \; atau \; \dfrac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial p} = 0$.

$\dfrac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial\sigma} = -\dfrac{np}{\sigma} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2}$ sehingga $0 = -\dfrac{np}{\hat{\sigma}} + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\sigma}^2}$ dan $0 = -np + \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\sigma}}$

dan kita peroleh $\hat{\sigma} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{np}$.

Berdasarkan hasil estimasi tehadap σ yang kita peroleh diatas, maka kita dapat membuktikan bahwa $E(\hat{\sigma}) = \sigma \; dan \; Var(\hat{\sigma}) = \dfrac{\sigma^2}{np}$. Distribusi dari $\hat{\sigma}$ merupakan distribusi gamma dengan parameter $np \; dan \; \dfrac{\sigma}{np}$.

Seperti kita ketahui $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ adalah distribusi identik independen (iid) yang berdistribusi gamma dengan parameter p dan σ, oleh karena itu maka $\sum_{i=1}^{n} x_i$

berdistribusi gamma dengan parameternya np dan σ, sedangkan untuk $\hat{\sigma} = \sum x_i \big/ np$ merupakan distribusi gamma dengan parameternya np dan $\frac{\sigma}{np}$. Sehingga kita peroleh fungsi kepadatan peluang (fkp) dari $\hat{\sigma}$ adalah sebagai berikut:

$$g(\hat{\sigma}|p,\sigma) = \frac{1}{\Gamma(np)} \frac{1}{\left(\sigma/np\right)^{np}} \exp\left(\frac{-\hat{\sigma}}{\sigma/np}\right) \cdot \hat{\sigma}^{np-1}$$

diperoleh $\frac{L(x_1,\cdots,x_n|p,\sigma)}{g(\hat{\sigma}|p,\sigma)} = \frac{\Gamma(np)}{[\Gamma(p)]^n} \frac{1}{(np)^{np}} \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}}{\hat{\sigma}^{np-1}}$ bebas dari parameter σ yang tidak diketahui. Karena itu, $\hat{\sigma}$ adalah cocok untuk σ. Kelengkapan dari $\hat{\sigma}$ dapat dibuktikan dengan menggunakan sifat unik dari transform Laplace dan mengacu pada Lehmann dan Scheffe (1955). Sehingga kita memperoleh hasil bahwa $\hat{\sigma}$ tidak hanya merupakan MLE tetapi juga merupakan UMVUE dari σ. Dalam model distribusi gamma kita mengetahui bahwa rata-rata hidup adalah $p\sigma$ dan jika kita mengestimasi $p\sigma$ maka MLE dan UMVUE dari $p\sigma$ adalah sama untuk rata-rata sampel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Besar dari parameter p dan σ tidak diketahui. Kita akan melakukan estimasi parameter p dan σ. Berdasarkan perhitungan diatas kita telah memperoleh hasil estimasi parameter σ yaitu $\hat{\sigma} = \sum x_i \big/ np$. Selanjutnya kita akan mengestimasi parameter p berdasarkan pada estimasi σ yang telah kita peroleh.

- Fungsi kepadatan peluang (fkp) bersama dari $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ adalah:

$$f(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}|p,\sigma) = n! \prod_{i=1}^{n} f(x_{(i)}|p,\sigma)$$

- Fungsi likelihoodnya adalah:

$$L\left(p,\sigma \middle| \mathrm{x}_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\right) = n! \prod_{i=1}^{n} f\left(x_{(i)} \middle| p,\sigma\right)$$

$$L\left(p,\sigma \middle| \mathrm{x}_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\right) = n! \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{x^{p-1}}{\sigma^{p}} \exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)$$

$$L\left(\mathrm{p},\sigma \middle| \mathrm{x}_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)}\right) = n! [\Gamma(p)]^{-n} \sigma^{-np} \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}\right) \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1}$$

$$\ln L(p,\sigma) = \ln \left[n! [\Gamma(p)]^{-n} \sigma^{-np} \prod_{i=1}^{n} x_i^{p-1} \exp\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}\right)\right]$$

$$= \ln n! - n \ln \Gamma(p) - np \ln \sigma + (p-1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma}$$

Nilai maksimum dari $L(\sigma, p|x_i)$ akan dicapai apabila $\frac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial \sigma} = 0$ *atau* $\frac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial p} = 0$.

$$\frac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial \sigma} = -\frac{np}{\sigma} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial p} = -n \frac{\partial}{\partial p} \ln \Gamma(p) - n \ln \sigma + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$$

Fungsi $\frac{\partial}{\partial p} \ln \Gamma(p)$ sulit untuk dipecahkan sehingga untuk rumus diatas kita dapat menyelesaikannya dengan menggunakan metode iterasi Newton-Raphson. Metode lain yang dapat kita adalah dengan mensubstitusikan $\hat{\sigma} = \sum x_i \big/ np = \bar{x} \big/ p$ ke dalam persamaan $\frac{\partial \ln L(\sigma, p|x_i)}{\partial p} = -n \frac{\partial}{\partial p} \ln \Gamma(p) - n \ln \sigma + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = 0$. Sehingga diperoleh persamaan seperti dibawah ini:

$$\frac{d}{dp}\ln\Gamma(p)-\ln p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\ln\bar{x}\,.$$

MLEnya adalah $\hat{\sigma}=\bar{x}/\hat{p}$ dimana $\hat{p}$ adalah hasil dari penyelesaian $\frac{d}{dp}\ln\Gamma(p)-\ln p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\ln\bar{x}$. Persamaan $\frac{d}{dp}\ln\Gamma(p)-\ln p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-\ln\bar{x}$ dapat kita selesaikan dengan menggunakan metode interpolasi invers. Fungsi $\frac{d}{dp}\ln\Gamma(p)$ diketahui sebagai fungsi gamma dan perluasannya dapat dilihat pada tabel dalam Abramowitz dan Stegun (1964) dan Pairman (1919). Untuk nilai p yang besar, kita menggunakan aproksimasi

2. Sampel tersensor tipe I
3. Sampel tersensor tipe II

F. Estimasi reliabiliti

Misalkan $S(t)=1-F(t|p,\sigma)$ adalah fungsi reliabiliti. Maka untuk distribusi gamma dengan parameter p dan σ, fungsi reliabilitinya $S(t|p,\sigma)$ adalah sebagai berikut:

$$S(t|p,\sigma)=\int_t^{\infty}\frac{1}{\Gamma(p)}\frac{x^{p-1}}{\sigma^p}\exp\left(\frac{-x}{\sigma}\right)dx$$

MLE dari $S(t|p,\sigma)$ dinotasikan dengan $S(t|\hat{p},\hat{\sigma})$ dimana $\hat{p}\ dan\ \hat{\sigma}$ adalah MLE dari p dan σ. Oleh karena itu untuk sampel lengkap diperoleh:

$$\begin{aligned}\hat{S}(t|p,\sigma)&=S(t|\hat{p},\hat{\sigma})\\&=\frac{1}{\hat{\sigma}^{\hat{p}}\Gamma(\hat{p})}\int_t^{\infty}x^{\hat{p}-1}\exp\left(\frac{-x}{\hat{\sigma}}\right)dx\\&=\frac{1}{\Gamma(\hat{p})}\int_{t/\hat{\sigma}}^{\infty}y^{\hat{p}-1}\exp(-y)dy\end{aligned}$$

Untuk nilai $t,\ \hat{p},\ dan\ \hat{\sigma}$ yang diketahui, hasil pengintegralannya dapat kita peroleh dengan menggunakan tabel fungsi gamma tak lengkap [K. Pearson, 1968]

Pada kasus dimana p diketahui, MLE dari $S(t|p,\sigma)$ akan berubah menjadi $\hat{S}(t|p,\hat{\sigma})$ dimana $\hat{\sigma}=\frac{\bar{x}}{p}$. Karena itu rumus estimasi reliabiliti dimana p diketahui adalah sebagai berikut:

$$\hat{S}(t|p,\sigma)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{tp/\bar{x}}^{\infty} y^{p-1}\exp(-y)dy$$

Seperti telah diketahui diatas bahwa apabila p diketahui maka $\hat{\sigma}=\bar{x}/p$ adalah UMVUE dari σ *dan* $\hat{\sigma}$ dapat ditunjukkan